

УДК 621.317.61

## **ОСОБЕННОСТИ МЕТРОЛОГИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТА ГАРМОНИК НА ЦИФРОВОЙ ОСНОВЕ**

**С.В. Безденежных**

*ФГУП «ВНИИФТРИ», Менделеево, Московская обл.  
bsv@vniiftri.ru*

*Обосновывается необходимость использования цифровой обработки при сложной обработке сигналов. Анализ геофизических данных был одним из первых примеров обработки сигналов цифровыми методами.*

*Дается ссылка на литературные источники, где рассматриваются различные алгоритмы обработки цифровых кодов мгновенных значений исследуемого сигнала для определения коэффициента гармоник и их погрешности. Приводится подробное описание аналого-цифрового преобразования с приведением обобщенной схемы работы АЦП.*

*В работе сообщается о существовании различных вариантов цифрового синтеза сигналов, при этом уделяется основное внимание технологии прямого цифрового синтеза (DDS).*

*В заключение сообщается о создании во ФГУП «ВНИИФТРИ» на цифровой основе Государственного первичного эталона единицы коэффициента гармоник в диапазоне (0,001...100) % для сигналов с основной гармоникой в диапазоне частот (10...200 000) Гц (ГЭТ 188-2010), приводятся его основные характеристики.*

*Ключевые слова: обработка сигналов, цифровые методы, алгоритмы обработки цифровых кодов значений сигнала, уровни гармоник, прямой цифровой синтез, государственный первичный эталон.*

## **FEATURES OF METROLOGICAL ASSURANCE OF MEASURING INSTRUMENTS OF HARMONIC FACTOR ON DIGITAL BASIS**

**S.V. Bezdenezhnykh**

*FSUE "VNIIFTRI", Mendeleevo, Moscow region  
bsv@vniiftri.ru*

*The necessity of using digital processing in complex signal processing is proved. Analysis of geophysical data was one of the first examples of signal processing by digital methods.*

*Reference is made to the literary sources, where various algorithms for processing of the digital codes of instantaneous values of the studied signal are considered for determination of the harmonic factor and their errors. A detailed description of the analog-to-digital conversion with a generalized scheme of the ADC is given.*

*The work reports on the existence of different variants of signal digital synthesis, with the focus on direct digital synthesis technology (DDS).*

*In conclusion, the development of the State Primary Standard of the unit of harmonic factors in the range of (0.001 ... 100) % for signals with the main harmonic in the frequency range of (10...200 000) Hz (GET 188-2010) on a digital basis at the VNIIFTRI Federal State Unitary Enterprise is reported; its main characteristics are given.*

*Key words: signal processing, digital methods, algorithms for processing of digital codes of signal values, harmonic levels, direct digital synthesis, the state primary standard.*

До недавнего времени обработка сигналов в измерительной технике, как правило, выполнялась при помощи аналоговых устройств. Аналоговые сигналы являются понятными, они могут быть удобно представлены некоторой непрерывной функцией времени. Методы их обработки (усиление, фильтрация, генерация) достаточно хорошо развиты. Быстродействие, стоимость и размеры были, конечно, тремя важными факторами, говорившими в то время в пользу применения аналоговых устройств.

Принципы построения средств измерений коэффициента гармоник ( $K_g$ ) или коэффициента нелинейных искажений (КНИ) также основывались на аналоговой обработке сигналов (усиление, аналоговая фильтрация, преобразование, сравнение и т.п.). При измерениях  $K_g$  с помощью аналоговой фильтрации из исследуемого сигнала выделяется основная гармоника. Определяются среднеквадратические значения (СКЗ) напряжения сигнала основной гармоники и исследуемого сигнала без основной гармоники.  $K_g$  вычисляется по следующей формуле:

$$K_g = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^N U_i^2}}{U_1}, \quad (1)$$

где  $U_i$  — напряжения гармонических составляющих с частотами кратными частоте основной (первой) гармоники.

Для формирования сигнала с заданным значением  $K_g$  формируются отдельно гармонический сигнал с минимумом побочных гармоник (подавляемых фильтром низкой частоты, ФНЧ) и сигнал с гармониками на частотах кратных частоте основного сигнала (сигнал высших гармоник). СКЗ напряжений сигнала и высших гармоник основной гармоники уравниваются. Сигнал высших гармоник, ослабленный прецизионным аттенюатором до уровня, необходимого для получения заданного значения  $K_g$ , суммируется с основным гармоническим сигналом. Суммарный сигнал имеет заданное значение  $K_g$ .

Особую роль играют сигналы, форма которых достаточно точно соответствует хорошо изученным математическим функциям. Такие сигналы удобно использовать для калибровки эталонов  $K_g$ . Примерами могут служить сигналы, имеющие форму меандра или пилообразного напряжения, с коэффициентами нелинейных искажений  $K_g = 48,3322\%$  (меандр) и  $K_g = 12,1259\%$  (пила) и достаточно легко формируемые.

Особенно удобен для целей калибровки и воспроизведения эталонных значений КНИ так называемый сигнал «усечённого косинуса».

Форма такого сигнала записывается следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} A \cos \omega t & \text{при } 0 \leq \omega t \leq \pi - \theta \\ A \cos (\pi - \theta) & \text{при } \pi - \theta \leq \omega t \leq \pi + \theta \\ A \cos \omega t & \text{при } \pi + \theta \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases} .$$

Угол  $\theta$  называется углом отсечки. Свойства такого сигнала хорошо знакомы разработчикам усилителей мощности потому, что такой сигнал формируется на выходе усилителей, работающих в режимах АВ и В. Сигнал с формой «усечённого косинуса» содержит бесконечное число гармоник, уровни которых зависят от угла отсечки. Функции зависимости амплитуд этих гармоник от угла отсечки получили название функций Берга. Функции Берга имеют вид:

$$a_0 = \frac{A(\sin \theta - \theta \cos \theta)}{\pi(1 - \cos \theta)};$$

$$a_1 = \frac{A(\theta - \sin \theta \cdot \cos \theta)}{\pi(1 - \cos \theta)};$$

$$a_n = \frac{2A(\sin n\theta \cdot \cos \theta - n \cdot \cos n\theta \cdot \sin \theta)}{\pi \cdot n(n^2 - 1)(1 - \cos \theta)}, \quad n \geq 2.$$

Зная угол отсечки  $\theta$ , по этим формулам можно определять уровни гармоник в выходном сигнале. Особенность поведения спектра «усечённого косинуса» состоит в том, что при изменении угла отсечки уровни спектральных составляющих при определённых его значениях обращаются в ноль. Это позволяет достаточно точно (с помощью анализатора спектра) фиксировать эти значения угла отсечки, а значит и значения  $K_{\Gamma}$  сигнала «усечённого косинуса». Способ воспроизведения заданного значения  $K_{\Gamma}$  с помощью сигнала «усечённого косинуса» (при  $K_{\Gamma} \geq 5\%$ ) использовался в старом Государственном первичном эталоне (ГПЭ) единицы КНИ, находившемся в г. Харькове. Для получения значений  $K_{\Gamma} < 5\%$  сигнал «усечённого косинуса» в калиброванной пропорции подмешивался к «чистому» синусоидальному сигналу, предварительно уравнивая фазы этих сигналов.

Этот метод получения калиброванного значения КНИ называется абсолютным (или нулевым) и не имеет источников методической погрешности. Поэтому разработчики ГПЭ считали, что этим способом может быть в принципе реализована любая степень точности, и положили его в основу первичного эталона.

Источники погрешности абсолютного метода воспроизведения калиброванного значения  $K_{\Gamma}$ :

- остаточные искажения синусоидального сигнала первой гармоники;
- погрешность суммирования «чистого» синусоидального сигнала исходной частоты и сигнала «усечённого синуса» из-за фазовых рассогласований;

- несоответствие формы реального сигнала «усечённого синуса» его математической модели из-за собственных искажений формирователя и переходных процессов в моменты смены функции, описывающей временное изменение амплитуды.

Аналоговые калибраторы и измерители Кг более низкого разряда работают следующим образом. Калибраторы Кг формируют сигнал основной гармоники и отдельно сигнал, содержащий высшие гармоники, с амплитудами, убывающими по мере роста номера гармоники. Напряжения основной и высших гармоник уравнивают, используя для этой цели термопреобразователь (по напряжению постоянного тока на выходе термопреобразователя). Заданное значение КНИ получают, суммируя сигнал основной гармоники с сигналом высших гармоник, ослабленным в соответствующее число раз образцовым делителем. В измерителях Кг основная гармоника подавляется в измеряемом сигнале с помощью режекторного фильтра. СКЗ напряжения полученного таким образом сигнала делится на СКЗ измеряемого сигнала или на СКЗ напряжения сигнала первой гармоники, выделенного узкополосным фильтром.

Ниже перечислены основные источники погрешности аналоговых калибраторов и измерителей Кг. Для калибраторов:

- остаточные искажения синусоидального сигнала первой гармоники;
- остаток от подавления первой гармоники в канале высших гармоник (если для создания сигнала высших гармоник используется искажённый сигнал первой гармоники);
- погрешность уравнивания СКЗ напряжений первой гармоники и высших гармоник;
- погрешность образцового делителя напряжения;
- собственные искажения выходного усилителя и сумматора сигналов первой и высших гармоник.

Для измерителей:

- нелинейные искажения в усилителях входного тракта и межблочных усилителях;
- неравномерность амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) в усилителях входного тракта и межблочных усилителях;
- погрешности измерений СКЗ напряжений широкополосных сигналов (измеряемого сигнала и сигнала высших гармоник);
- наличие в сигнале высших гармоник напряжения основной гармоники (неполное подавление основной гармоники режекторным фильтром).

Кроме того, при аналоговой обработке сигнал подвергается и всем возможным искажениям, определяемым свойствами аналоговых методов: наводки шумов и фона, изменению спектрального состава вследствие неравномерности АЧХ, дрейфу коэффициента усиления и т.п. Эти искажения также влияют на суммарную погрешность.

Уже в 50-х годах, особенно в областях, где требовалась сложная обработка сигналов, началось использование цифровой обработки. Необходимость этого возникала, например, при анализе некоторых геофизических данных, которые записывались на магнитную ленту для последующей обработки на больших ЭВМ. Анализ геофизических данных был одним из первых примеров обработки сигналов цифровыми методами. Этот тип обработки сигналов не всегда мог быть выполнен в реальном времени. Например, для обработки данных, записанных на магнитную ленту только в течение нескольких секунд, часто требовались минуты или часы машинного времени. Применение цифровых ЭВМ давало большой выигрыш из-за их гибкости и универсальности. Однако обработка не всегда могла быть выполнена в реальном времени. Следовательно, цифровая ЭВМ использовалась в основном для аппроксимаций или моделирования аналоговых систем обработки. В соответствии с этим, например, задача цифровой фильтрации в основном сводилась к программированию фильтра на цифровой ЭВМ так, чтобы при аналого-цифровом преобразовании сигнала с последующей цифровой фильтрацией и цифро-аналоговым преобразованием система аппроксимировала хороший аналоговый фильтр.

По мере того, как обработка сигналов осуществлялась на цифровых ЭВМ, естественной тенденцией было исследование всё более сложных алгоритмов обработки сигналов. Некоторые из этих алгоритмов были разработаны с учётом больших возможностей цифровой ЭВМ, однако из-за сложности не реализовывались в аналоговой аппаратуре, т.е. многие из этих алгоритмов оказывались интересными, но до некоторой степени непрактичными. Примером класса алгоритмов этого типа был ряд алгоритмов, названных анализом кепстра и гомоморфной фильтрацией [14]. На цифровых ЭВМ было ясно продемонстрировано, что эти алгоритмы могли быть успешно применены в системах полосового сжатия речи, развёртки и устранения эхо-сигналов. Использование этих алгоритмов требует точной оценки обратного преобразования Фурье логарифма преобразования Фурье входного сигнала. При этом требования к точности и разрешающей способности были таковы, что аналоговые анализаторы спектра оказывались непрактичными. Развитие таких алгоритмов обработки сигналов сделало привлекательной идею построения полностью цифровых систем обработки сигналов.

В это время цифровая обработка сигналов начала формироваться как новое научное и техническое направление. Она опиралась на достижения цифровой вычислительной техники и известные задолго до этого в математике Z-преобразование, преобразования Лапласа, Фурье, линейные разностные уравнения и др. Фундаментальными для цифровой обработки стали проведённые в 30–40-е годы прошлого века работы по теории дискретизации и восстановления сигналов Котельникова–Шеннона–Найквиста. Большую роль

в развитии цифровой обработки сыграли исследования Кайзера по цифровой фильтрации и предложенные в 1965 г. Кули и Тьюки алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ). Были получены и значительные теоретические результаты по адаптивной обработке сигналов, спектрально-корреляционному анализу, вейвлет-анализу и их приложениям.

Например, алгоритм быстрого преобразования Фурье уменьшил время вычисления преобразования Фурье на несколько порядков. Это позволило создать очень сложные алгоритмы обработки сигналов в реальном времени. Кроме того, с учётом возможностей действительной реализации алгоритма быстрого преобразования Фурье в специализированном цифровом устройстве многие алгоритмы обработки сигналов, бывшие ранее непрактичными, стали находить воплощение в специализированных устройствах. Области применения цифровой обработки сигналов стремительно расширялись. Этому способствовало:

- быстрое развитие техники аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразования;
- развитие технологии больших интегральных схем и связанное с ним уменьшение стоимости и размеров цифровых устройств при одновременном увеличении их быстродействия;
- возросшая доступность дешёвых вычислительных технологий.

Области применения цифровой обработки сигналов постоянно расширяются. Методы цифровой обработки будут, несомненно, способствовать существенным изменениям в областях науки и техники, где они будут применяться. С начала 80-х годов прошлого века цифровое аудиооборудование вытесняет аналоговое оборудование в системах вещания и записи, поскольку возможности цифровой обработки значительно повысили качество записи и воспроизведения звука. Например, стерео CD-проигрыватели, DVD-аудиопроигрыватели и студийные звукозаписывающие системы класса high-end имеют коэффициент гармоник менее 0,001 % и динамический диапазон более 100 дБ. В связи с этим требования к средствам измерений, используемых для контроля этих параметров в процессе производства и эксплуатации и, соответственно, к эталонному оборудованию значительно возросли. Очевидно, для обеспечения необходимых метрологических параметров в эталонах необходимо использование цифровой обработки сигналов. В свою очередь, применение цифровых методов приводит к изменению алгоритмов воспроизведения и измерений коэффициента гармоник.

Ключевой особенностью использования цифровой обработки сигналов (ЦОС) в измерительной технике нелинейных искажений аналоговых сигналов является то, что объектом исследований ЦОС являются цифровые сигналы, полученные в результате преобразований аналоговых сигналов. После таких преобразований часть информации об аналоговом сигнале теряется, и

в цифровой сигнал вносятся дополнительные искажения. В общем случае свойства цифровых сигналов отличаются от соответствующих им аналоговых сигналов.

Вместе с развитием техники аналого-цифрового преобразования в печати стали появляться публикации об исследованиях применений аналого-цифровых преобразователей (АЦП) для измерений коэффициента гармоник, рассматривались различные алгоритмы обработки цифровых кодов мгновенных значений исследуемого сигнала для определения коэффициента гармоник и их погрешности (например, [1–4]).

Цифровая обработка имеет дело с цифровыми сигналами, поэтому аналоговый сигнал преобразуется в цифровой. Общая структурная схема преобразования аналогового сигнала в цифровой сигнал приведена на рис. 1.

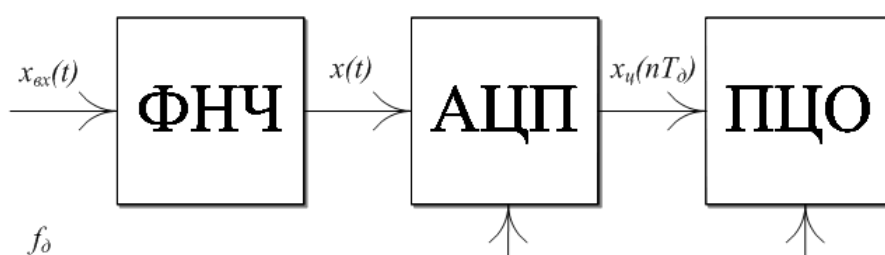


Рис. 1. Общая структурная схема преобразования аналогового сигнала в цифровой

Входной аналоговый сигнал  $x_{ax}(t)$  в этой схеме поступает на аналого-цифровой преобразователь (АЦП) через аналоговый фильтр нижних частот ФНЧ с частотой среза  $f_m$ . Фильтр обеспечивает ограничение полосы частот входного сигнала максимальной частотой  $f_m$ , соответствующей используемой в АЦП частоте дискретизации сигнала по времени  $f_m < f_{\delta}/2$ . Он ослабляет искажения наложения при дискретизации сигналов с неограниченным по частоте спектром (или сигнала с ограниченным спектром в присутствии шума).

Аналого-цифровое преобразование включает дискретизацию сигнала по времени, квантование по уровню и цифровое кодирование. Обобщённая схема работы АЦП показана на рис. 2. В дискретные равноотстоящие моменты времени  $nT_{\delta}$  ( $T_{\delta} = 1/f_{\delta}$  — период дискретизации сигнала) происходят выборки входного сигнала  $x(nT_{\delta})$ . Каждой выборке ставится в соответствие одно из квантованных значений напряжения  $x_{кв}(nT_{\delta})$ , ближайшее (или минимальное из двух ближайших) к напряжению данной выборки. Последовательность квантованных значений напряжения обрабатывается цифровым процессором ЦПО по определённому алгоритму (например, децимации) и преобразуется в последовательность цифровых двоичных кодов, цифровой сигнал  $x_{ц}(nT_{\delta})$  с числом разрядов, соответствующим разрядности АЦП.

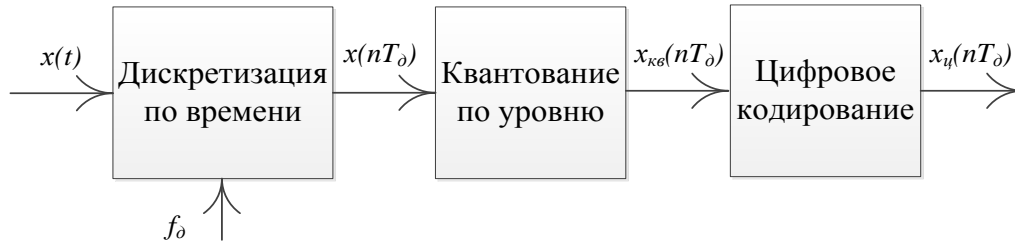


Рис. 2. Обобщённая схема работы АЦП

Математически дискретизированный сигнал, как функцию времени, можно записать так:

$$x(nT_d) = x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_d) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_d) \cdot \delta(t - nT_d),$$

где  $\delta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau = 0 \\ 0 & \text{при } \tau \neq 0 \end{cases}$ . (2)

Иногда дискретизированный сигнал выражается функцией номера выборки  $x(n) = x(nT_d)|_{T_d=1}$ .

В процессе дискретизации теряется часть информации об аналоговом сигнале. Выражение (2) является математической моделью физически нереализуемого сигнала. Все известные физические процессы имеют протяжённость во времени, поэтому импульс с нулевой длительностью является математической абстракцией. Абстрактен и сам сигнал  $x(nT_d)$ , определяемый выражением (2).

Спектр дискретизированного сигнала:

$$X_d(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_d) e^{-j\omega nT_d}. \tag{3}$$

В силу периодичности комплексной экспоненты  $e^{-j\omega nT_d} = e^{-j(\omega+k\omega_d)nT_d}$  спектр дискретизированного сигнала периодичен по частоте с периодом  $k\omega_d$  ( $\omega_d = 2\pi/T_d$ )

$$X_d(j\omega) = X[j(\omega + k\omega_d)], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и состоит из периодически повторяющихся копий спектра аналогового сигнала (рис. 3). На рис. 3а показан модуль спектра аналогового сигнала с ограниченной полосой (максимальная частота  $\omega_m$ ), на рис. 3б — модуль спектра дискретизированного сигнала.

Из рис. 3б видно, что во избежание наложения спектров при дискретизации необходимо выполнение требования  $\omega_m < \omega_d/2$  (теорема Котельникова). Высокочастотные составляющие сигнала, а также внешние шумы или помехи с частотами  $\omega_{вч} > \omega_d/2$  при дискретизации трансформируются (преобразуются, свёртываются) в основную полосу частот дискретного сигнала, создавая помехи наложения на частотах  $\omega'_{вч} = |\omega_{вч} - k\omega_d| \leq \omega_d/2$  и, следовательно, добавляя погрешность определения Кг.



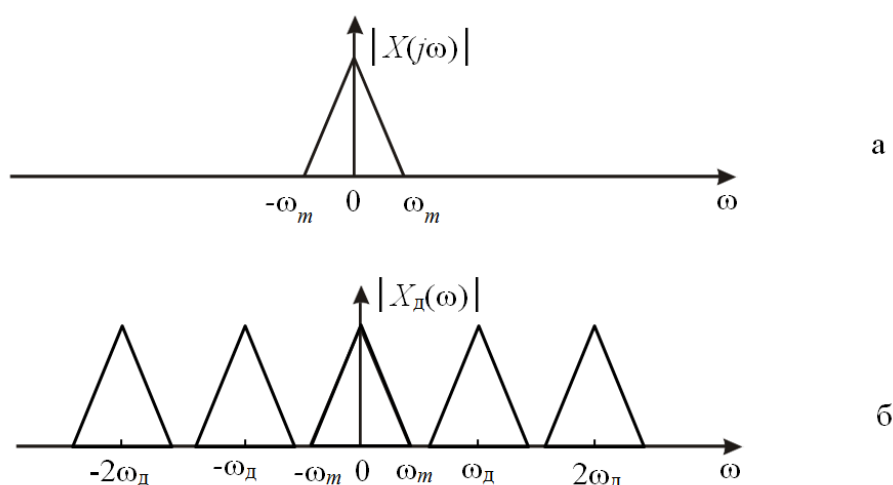


Рис. 3. Модуль спектра аналогового сигнала с ограниченной полосой (а); модуль спектра дискретизированного сигнала (б)

К параметрам аналогового фильтра ФНЧ предъявляются очень высокие требования. Во-первых, АЧХ фильтра в полосе пропускания должна иметь высокую равномерность. Неравномерность АЧХ напрямую суммируется к погрешности определения Кг. Во-вторых, АЧХ фильтра должна иметь узкую переходную полосу от полосы пропускания до полосы ослабления. Таким требованиям могут удовлетворять ФНЧ только высокого порядка (в большинстве случаев не менее пятого). Реализация таких фильтров достаточно сложна.

Часто частота дискретизации выбирается в несколько раз выше минимально возможной по теореме Котельникова (передискретизация). При этом требования к аналоговому ФНЧ значительно ослабляются. После преобразования в цифровой сигнал он обрабатывается цифровым фильтром с крутыми срезами АЧХ, реализация которого проще аналогового с аналогичными параметрами. Цифровым фильтром и осуществляется основное ограничение частотного спектра. Для снижения скорости последующей обработки и уменьшения необходимого объема памяти частота дискретизации цифрового сигнала понижается путём прореживания выборок сигнала (децимации) и приводится в соответствие с полосой его спектра [11].

При квантовании по уровню бесконечное множество возможных значений дискретного сигнала  $x(n)$  в заданном максимальном диапазоне его изменения  $D_{x \max} = (x_{\max} - x_{\min})$  замещается конечным числом уровней квантования  $m$  дискретного квантованного сигнала  $x_{\text{KB}}(n)$ . С одним из этих уровней в соответствии с определённым правилом или алгоритмом и отождествляется точное мгновенное значение дискретного сигнала  $x(n)$ . Используются два ал-

горитма отождествления: округление и усечение. При округлении за результат квантования принимается ближайший квантованный уровень. При усечении за результат квантования принимается минимальный из двух ближайших квантованных уровней. Интервал между уровнями квантования называется шагом квантования по уровню  $Q = D_{x \max}/m$ .

Разность между мгновенным и квантованным значением сигнала называется ошибкой квантования. В классическом рассмотрении ошибка квантования считается случайной величиной с дисперсией равной  $Q/2\sqrt{3}$ .

Поскольку мощность шума дискретизации не зависит от частоты дискретизации  $f_d$ , передискретизация уменьшает спектральную плотность шума, т.к. мощность шума распределяется на больший диапазон частот. На рис. 4 показаны уровни цифрового шума без передискретизации (а) и при передискретизации (б) с частотой дискретизации, увеличенной в 4 раза. Для дальнейшего уменьшения уровня шума применяется операция «Noise Shaping». Технология «Noise Shaping» заключается в применении квантователя с отрицательной обратной связью и интегратором на его входе. Интегратор создаёт частотную зависимость шума квантования. При этом изменяется спектр шума квантования таким образом, что мощность шума в полосе частот сигнала уменьшается, а за пределами этой полосы увеличивается (рис. 4б). Такое изменение спектра шума сопровождается, к сожалению, значительным увеличением общей мощности шума квантования, о чём, обычно, умалчивается.

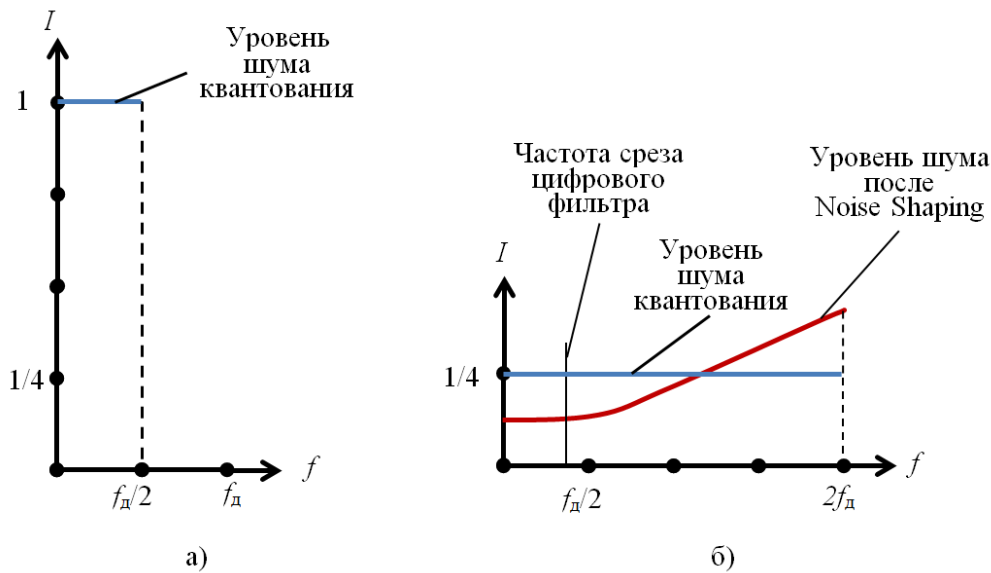


Рис. 4. Уровни цифрового шума без передискретизации (а) и при передискретизации (б) с частотой дискретизации, увеличенной в 4 раза

Для определения уровней гармоник при вычислениях нелинейных искажений используется дискретное преобразование Фурье:

$$U_i = \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos(2\pi f_1 n T_d)\right)^2 + \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(k) \sin(2\pi f_1 n T_d)\right)^2}, \quad (4)$$

где  $i$  — номер гармоники;  $f_1$  — частота основной (первой) гармоники.

Здесь необходимо знание точного значения частоты основной гармоники  $f_1$ . Важно определить это значение частоты в той же временной шкале, в какой формируются моменты дискретизации  $T_d$  (с использованием того же опорного или кварцевого генератора). Существуют разные способы определения частоты, отвечающие этому требованию, например, [5–8]. Как обычно, обеспечение высокой точности определения частоты находится в противоречии с вычислительными затратами, поэтому приходится делать выбор исходя из компромисса между точностью и вычислительными затратами.

Поскольку дискретизированный сигнал состоит из конечного числа выборок (ограничение аппаратной реализации ЦОС), и частота дискретизации обычно не синхронизирована с частотой основной гармоники исследуемого сигнала, в выборку попадает не целое число периодов входного сигнала. Это приводит к искажениям при вычислениях спектра с помощью дискретного преобразования Фурье. Эти искажения называются спектральными утечками, поскольку они вызывают «перетекание» энергии от одной спектральной компоненты к другим. В настоящее время имеется хорошо разработанный аппарат использования весовых функций (окон во временной области) [9–11], позволяющий значительно уменьшить эти спектральные утечки. Тем не менее, необходимо учитывать их влияние на погрешность определения Кг. Параметры различных весовых функций приведены в табл. 1.

Таблица 1

Окно	Максимальный уровень боковых лепестков, дБ	Асимптотическая скорость спада боковых лепестков, дБ/октава	Эквивалентная ширина полосы*	Ширина полосы по уровню 3 дБ*
Прямоугольное	–13,3	–6	1,00	0,89
Треугольное	–26,5	–12	1,33	1,28
Ханна	–31,5	–18	1,50	1,44
Хемминга	–43	–6	1,36	1,30
Наттолла ( $r = 3$ )	–98	–6	1,80	1,70
Гаусовское	–42	–6	1,39	1,33
Равноволновое	–50	0	1,39	1,33

\*Примечание. В бинах (бин — шаг разрешения по частоте дискретного преобразования Фурье), 1 бин =  $f_d/N$ .

Для воспроизведения единицы Кг используются цифровые методы на основе цифрового синтеза основной гармоники и гармоник с частотами кратными частоте основной гармоники.

Цифровой синтез — это операция обратная операции оцифровки, и она также базируется на принципе возможности восстановления аналогового сигнала  $y(t)$  из цифрового  $y(nT_d)$ , при условии  $\omega_m < \pi/T_d$ . Спектр цифрового сигнала представляет собой периодически повторяющиеся фрагменты спектра от  $-\omega_m$  до  $\omega_m$  (период повторения  $k\omega_m$ ,  $k$  — целое число) (рис. 4). Поэтому теоретически для восстановления аналогового сигнала из цифрового достаточно пропустить цифровой сигнал через идеальный фильтр низких частот с частотой среза  $f_{cp} = f_m$ . Поскольку при формировании сигнала с заданным значением Кг форма сигнала известна, цифровой сигнал формируется путём предварительного вычисления (с помощью внутреннего сигнального процессора, либо с помощью внешнего компьютера) отсчётов в дискретные моменты времени  $y(nT_d)$ . Так как сигнал периодичный с периодом  $1/f_1$  ( $f_1$  — частота основной гармоники синтезируемого сигнала), отсчёты вычисляются в течение одного периода и запоминаются в специальном ПЗУ. Сигнал восстанавливается с помощью ЦАП, на вход которого подаётся цифровой сигнал из ПЗУ. Таким образом, выходной сигнал АЦП аппроксимирует синтезируемый сигнал импульсами с длительностями  $\tau_0$  и амплитудами, соответствующими цифровым кодам на входе АЦП. Часто длительности импульсов равны периоду тактового сигнала ( $\tau_0 = T_d$ ), и на выходе ЦАП формируется ступенчатый сигнал. Характерной особенностью восстановления аналогового сигнала с помощью ЦАП является частотная зависимость коэффициента преобразования от цифрового кода к выходу ЦАП. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) ЦАП представляется в виде [13]:

$$K_{\text{ЦАП}} = \frac{\tau_0}{T_d} \left| \frac{\sin(\omega\tau_0 / 2)}{\omega\tau_0 / 2} \right|, \quad (5)$$

где  $\tau_0 \leq T_d$  — длительность импульсов на выходе ЦАП.

Из различных вариантов цифрового синтеза сигналов наибольшую популярность получил принцип прямого цифрового синтеза (*direct digital synthesis, DDS*). Основные принципы технологии DDS были опубликованы в 1971 г. [14]. Сейчас существует много вариантов реализации принципа DDS, классическим считается вариант, изображённый на рис. 5.

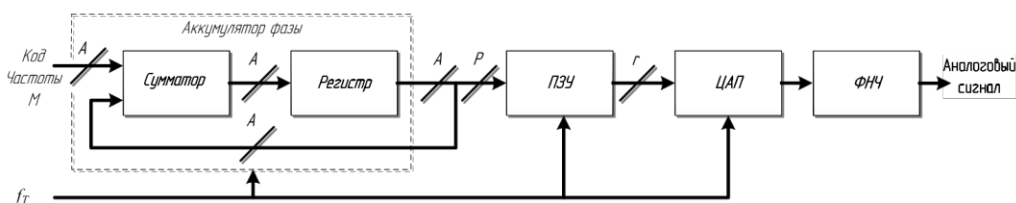


Рис. 5. Вариант реализации принципа DDS

Описание принципов работы приведённой структуры DDS даётся, например, в [12]. Структура DDS гармонического сигнала включает следующие основные блоки: аккумулятор фазы (накапливающий сумматор), преобразователь выходного кода аккумулятора фазы в коды мгновенных значений амплитуды сигнала (обычно ПЗУ, содержащий таблицу отсчётов сигнала, «*Look Up Table*»), ЦАП и аналоговый фильтр низкой частоты ФНЧ. Частота выходного сигнала определяется двумя параметрами: частотой тактового сигнала  $f_T$  и кодом частоты  $M$ . С каждым тактом частоты  $f_T$  содержимое  $A$ -разрядного регистра аккумулятора фазы увеличивается на код частоты  $M$ . Старшие разряды  $P$  аккумулятора фазы подаются на адресные входы ПЗУ, выбирая таким образом соответствующий отсчёт сигнала из таблицы отсчётов в ПЗУ. Цифровой отсчёт сигнала, в свою очередь, подаётся на  $r$ -разрядный ЦАП. Таким образом, в DDS аккумулятор фазы формирует последовательность кодов мгновенной фазы сигнала, которая изменяется линейно. Скорость изменения фазы задаётся кодом частоты. Далее с помощью ПЗУ линейно изменяющаяся фаза преобразуется в изменяющиеся по синусоидальному закону отсчёты выходного сигнала. Эти отсчёты поступают на ЦАП, на выходе которого формируется синусоидальный сигнал, состоящий из «ступенек» (или импульсов). Эти «ступеньки» фильтруются с помощью аналогового ФНЧ, на выходе которого получается синусоидальный сигнал.

Выходной синусоидальный сигнал восстанавливается из отдельных отсчётов. Целое число отсчётов на период укладывается лишь в частном случае (рис. 6а). В большинстве случаев это не так, и на каждом новом периоде сигнала отсчёты лежат в новых местах (рис. 6б). Конечно, картина периодически повторяется, но период повторения может быть самым разным. Он зависит от кода частоты, разрядности аккумулятора фазы и от разрядности используемого кода фазы. В любом случае с равным успехом из последовательности отсчётов будет восстановлен сигнал синусоидальной формы.

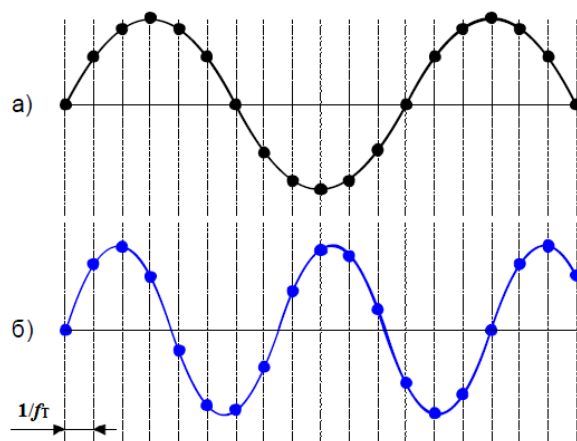


Рис. 6. Восстановление выходного синусоидального сигнала из отдельных отсчётов

Аккумулятор фазы работает с периодическими переполнениями, обеспечивая арифметику по модулю  $2^A$ . Такое периодическое переполнение соответствует периодическому поведению функции  $\sin$  с периодом  $2\pi$ . Другими словами, частота переполнений аккумулятора фазы равна частоте выходного сигнала. Это частота определяется формулой:

$$F_{OUT} = M \cdot f_T / 2^A,$$

где  $F_{OUT}$  — выходная частота;  $f_T$  — тактовая частота;  $M$  — код частоты;  $A$  — разрядность аккумулятора фазы.

DDS имеет четыре основных источника побочных компонент в спектре: источник тактовых импульсов; усечение разрядов в фазовом аккумуляторе; погрешности из-за округлений отсчётов, сохранённых в ПЗУ; неидеальности ЦАП, включающие нелинейности и шум квантования.

Источник тактового сигнала DDS является главным источником фазовых шумов, даже несмотря на эффект их уменьшения в процессе деления частоты в DDS. Фазовый шум выходного сигнала DDS теоретически меньше фазового шума тактового сигнала на  $20 \log(f_T/F_{OUT})$  дБ. На практике это улучшение ограничено шумовым порогом схем DDS. Типичным для собственно фазового шума DDS является значение  $-130$  дБн<sup>1</sup>/Гц при расстройке на 1 КГц от выходной частоты. Если источник тактового сигнала имеет меньшие фазовые шумы, на выходе DDS всё равно не может быть получено их меньшее значение. Поэтому эту величину называют «остаточный фазовый шум».

Очевидно, джиттер тактовых импульсов приводит к ошибкам на выходе ЦАП и, соответственно, к ошибкам формирования заданного значения Кг. Если джиттер случайный, СКЗ ошибки на выходе будет составлять [15]:

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0 \omega \sigma,$$

где  $U_0$ ,  $\omega$  — амплитуда и частота сигнала на выходе ЦАП;  $\sigma$  — дисперсия джиттера тактовых импульсов.

Понятно, что необходимо добиваться такой величины джиттера, которая приводит к созданию СКЗ ошибки на выходе ЦАП меньше собственного шума ЦАП. Если предположить, что единственным источником шума ЦАП является шум квантования, а двойная амплитуда сигнала занимает весь диапазон ЦАП (от 0 до  $2^{r-1}$ ,  $r$  — разрядность ЦАП), на величину дисперсии джиттера накладывается следующее условие:

$$\sigma < \frac{1}{2^{r-1} \sqrt{6}}.$$

Разрядность фазового аккумулятора  $A$  определяет разрешение синтезатора по частоте, поэтому она выбирается достаточно большой (типичная раз-

<sup>1</sup> дБн обозначает дБ относительно уровня основной гармоники.

рядность 32 или 48 бит). Но только часть разрядов используется для адресации ПЗУ с таблицей синуса. Это вынужденная мера, вызванная необходимостью уменьшения размеров ПЗУ до разумных пределов. Действительно, если бы использовались все 32 бита, а каждый отсчёт в ПЗУ кодировался бы одним байтом, то необходимый объём ПЗУ составил бы 4 Гбайта! Поэтому для адресации ПЗУ используется только несколько старших разрядов аккумулятора фазы. Усечение кода фазы является внутренней операцией DDS, и извне изменить ничего нельзя. Отбрасывание младших битов приводит к возникновению ошибки в представлении фазы. Как следствие, это приводит к появлению погрешности амплитуды при преобразовании фазы в амплитуду, которое имеет место в DDS. Более того, эта погрешность является периодической, так как в зависимости от кода частоты состояния аккумулятора фазы повторяются чаще или реже. В результате в спектре выходного сигнала появляются отдельные составляющие, вызванные усечением кода фазы. На распределение фаз и амплитуд этих составляющих влияют три фактора:

- разрядность аккумулятора фазы ( $A$  бит);
- разрядность кода фазы после усечения ( $P$  бит);
- значение кода частоты ( $M$ ).

При некоторых значениях кода частоты составляющие, вызванные усечением кода фазы, отсутствуют вовсе, в то время как при некоторых других значениях кода частоты эти составляющие имеют максимальный уровень. Когда величина  $A-P$  равна 4 и более (обычное значение для реальных DDS), максимальный уровень составляющих, вызванных усечением кода фазы, достаточно точно можно определить как  $-6,02 \cdot P$  дБ. Например, 32-разрядный DDS с 12-разрядным кодом фазы имеет максимальный уровень этих составляющих  $-72$  дБ. Причём наихудшим является случай, когда наибольший общий делитель  $M$  и  $2(A-P)$  равен  $2(A-P-1)$ , другими словами, когда в отбрасываемой части кода фазы старший бит всегда равен 1, а все остальные биты — 0. Другой предельный случай соответствует отсутствию составляющих. При этом наибольший общий делитель  $M$  и  $2(A-P)$  должен быть равен  $2(A-P)$ , другими словами, когда в отбрасываемой части кода фазы всегда все нули. Все иные значения кода частоты дают промежуточные уровни составляющих, вызванных усечением кода фазы. Это обстоятельство нужно учитывать при проектировании цифровых калибраторов Кг, закладывая возможность выбора частоты такта для обеспечения минимальных уровней этих побочных составляющих.

Частотное распределение составляющих, вызванных усечением кода фазы, не может быть проанализировано так просто, как их максимальная амплитуда. Рассматривая вопрос на качественном уровне, можно сказать, что усечение фазы приводит к появлению её ошибки, величина которой меняется по пилообразному закону. Сигнал ошибки появляется в результате отбрасывания битов кода фазы. Поэтому для того, чтобы вычислить частоту этого

сигнала, можно рассмотреть только ту часть аккумулятора фазы, которая отбрасывается при усечении её кода. Разрядность этой части аккумулятора равна числу отбрасываемых битов ( $B$ ). Соответственно, она способна воспринимать только младшую часть кода частоты с разрядностью  $B$ . Тогда частота пилообразного сигнала ошибки будет равна  $f_T \cdot \frac{ET}{2^B}$  ( $f_T$  — частота дискретизации;  $ET$  — эквивалентный код частоты, представленный значением отброшенных битов при выполнении усечения полного кода частоты;  $B$  — разрядность  $ET$ , количество отброшенных битов).

При этом необходимо учитывать, что частота пилообразного сигнала или её гармоники могут лежать на частотах выше  $f_T/2$ . В этом случае они способны попасть в рабочую область частот в результате зеркального отображения спектра относительно частот  $nf_T$ .

На рис. 7 приведены зависимости уровня побочных компонентов от разрядности кода фазы для ЦАП разной разрядности. Неограниченно наращивать разрядность кода фазы нет необходимости ещё и потому, что снижение уровня побочных компонентов происходит только до определённого значения, зависящего от уровня шумов квантования ЦАП. На практике разрядность кода фазы должна быть на 2–3 разряда больше, чем разрядность применённого ЦАП. При этом погрешность из-за округления (не усечения!) кода фазы становится незаметной на фоне погрешности квантования ЦАП.

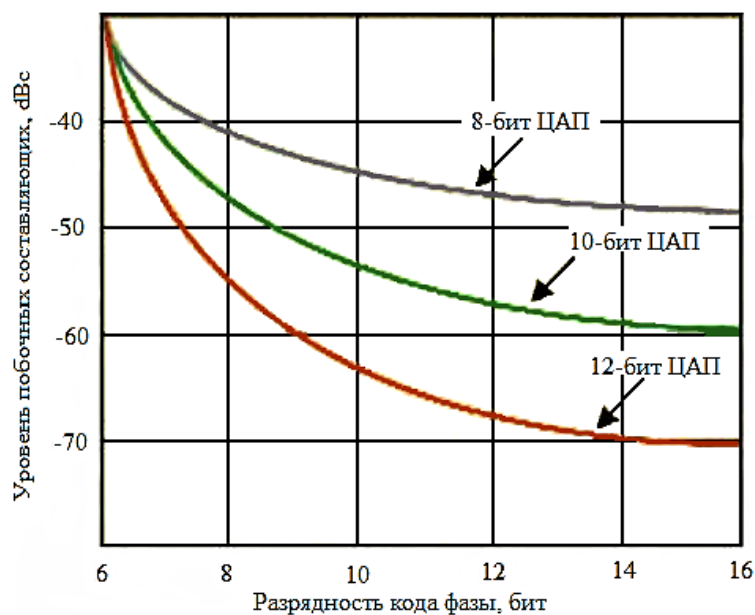


Рис. 7. Зависимости уровня побочных компонентов от разрядности кода фазы для ЦАП разной разрядности



Следует отметить, что существуют методы уменьшения влияния усечения кода фазы, основанные на добавлении к фазовой информации псевдослучайного шума. Таким образом, удастся уменьшить энергию соответствующих побочных компонентов, зато при этом увеличивается общий шумовой порог.

В процессе квантования амплитуды всегда будет присутствовать ошибка, связанная с конечной разрядностью применённого ЦАП. Ошибка квантования приводит к обогащению выходного спектра высокочастотными побочными компонентами. При повышении разрядности ЦАП ошибка квантования уменьшается, соответственно уменьшаются амплитуды связанных с этой ошибкой побочных компонентов. На рис. 8 синими точками показаны значения амплитуд синусоидального сигнала для 5-разрядного кода фазы. Красная линия показывает амплитудную погрешность 3-разрядного ЦАП из-за конечного числа разрядов.

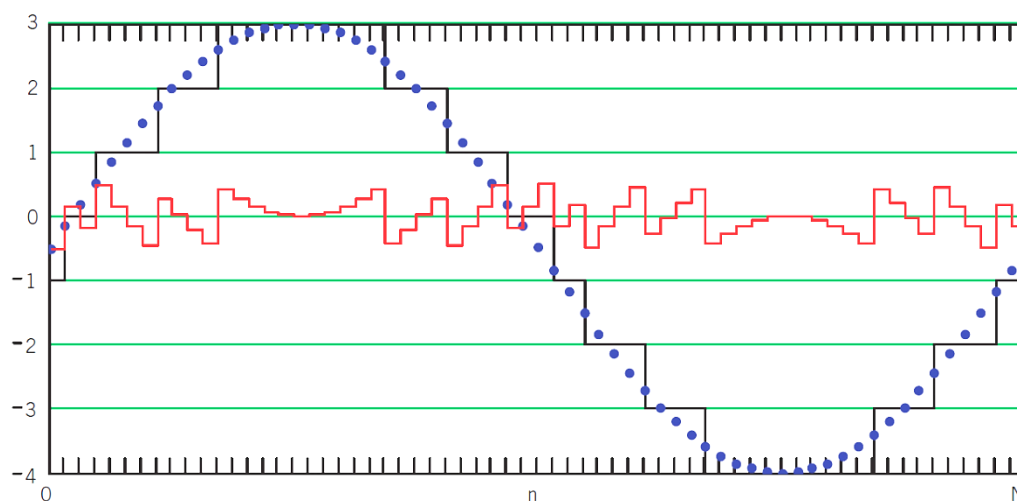


Рис. 8. Значения амплитуд синусоидального сигнала для 5-разрядного кода фазы (синие точки), амплитудная погрешность 3-разрядного ЦАП из-за конечного числа разрядов (красная линия)

Здесь погрешность квантования при цифроаналоговом преобразовании принято считать (как и при аналого-цифровом преобразовании) случайной величиной создающий шум квантования. При амплитуде сигнала, соответствующей полной шкале ЦАП, отношение сигнала к шуму квантования пропорционально разрядности ЦАП:

$$C/\text{Ш} = (6,02 \cdot r + 1,76) \text{ дБ}, \quad r \text{ — разрядность ЦАП.}$$

В конструкции DDS есть один элемент, который не совсем цифровой, а скорее аналоговый, это АЦП. Его параметры, точность, динамический диапазон, нелинейные искажения определяют параметры цифрового синтеза, но

АЦП присущи многие недостатки аналоговых элементов. Этим недостаткам лишены одноразрядные ЦАП на основе дельта-сигма-модуляции, в которых используется одноразрядный ЦАП (компаратор). Поскольку данный метод использует одноразрядный ЦАП, этому методу по определению свойственны линейность и монотонность. ЦАП на основе дельта-сигма-модуляции широко используется в высококачественной аудио воспроизводящей аппаратуре. Платой за использование одноразрядного ЦАП является необходимость установления очень высокой степени передискретизации. Например, в CD аудиоплеерах с шириной полосы в 15–18 кГц для обеспечения динамического диапазона 80–100 дБ тактовая частота должна превышать верхнюю частоту сигнала в 500–1600 раз, поэтому системная опорная частота в них обычно находится в пределах 12–20 МГц. Ещё одно преимущество ЦАП на основе дельта-сигма-модуляции — возможность использовать технологию уменьшения уровня шумов типа «Noise Shaping», применяемую обычно при использовании дельта-модуляции.

На первый взгляд, параметры ЦАП на основе дельта-сигма-модуляции кажутся привлекательными для использования в калибраторах Кг, но вопрос их практического использования для синтеза сигналов с калиброванными значениями Кг остаётся пока открытым.

Для старых вариантов реализации DDS было характерно наличие большого числа побочных спектральных компонентов. Усовершенствования, используемые в современных вариантах построения DDS, улучшили их параметры. Уровни побочных спектральных компонентов стали значительно меньшими, и их частоты предсказуемы. Аккуратное планирование распределения используемых частот позволяет размещать наиболее интенсивные паразитные спектральные компоненты за пределами рабочей полосы частот, что позволяет легко их отфильтровывать.

В целом, стало возможным с помощью ЦАП формирование не только сигнала высших гармоник, требования к спектральной чистоте которых достаточно низкие, но и сигнала основной гармоники, искажения которого определяют основную погрешность воспроизведения единицы Кг.

Впервые цифровой синтез для воспроизведения единицы Кг был использован в установке измерительной образцовой К2С-57, запущенной в серийное производство в 1991 году. Формирование сигнала с высшими гармониками происходило с помощью микросхемы 8-разрядного ЦАП М1118ПА1. Цифровые коды на вход ЦАП подавались с ПЗУ, хранящей 80 отсчётов (или 40 отсчётов для частоты первой гармоники 200 кГц) амплитуды сигнала в течение одного периода. Частота выборки адреса ПЗУ (отсчётов сигнала) определялась частотой первой гармоники (получалась умножением частоты первой гармоники на 80 или на 40). Сигнал первой гармоники в К2С-57, по традиции, формировался аналоговым генератором с последующей очисткой сигнала от посторонних гармоник с помощью ФНЧ.

В 2008 году на базе АЦП AD9260 появились серийно выпускаемые измерители коэффициента гармоник: установка измерительная К2С-84 и калибратор-измеритель нелинейных искажений СК6-20. Их метрологические характеристики вплотную приблизились к эталонным значениям. Для воспроизведения сигнала с заданным значением Кг в установке измерительной К2С84 используется DDS. При этом основная гармоника и высшие гармоники синтезируются отдельно и потом суммируются. В сигнале основной гармоники побочные спектральные компоненты и шумы, присущие DDS, подавляются высококачественными переключаемыми фильтрами. В генераторе — калибраторе гармонического сигнала СК6 122 с помощью DDS синтезируется сразу полный сигнал, содержащий основную и высшие гармоники в определённой пропорции, обеспечивающей воспроизведение заданного значения Кг.

В 2010 году во ФГУП «ВНИИФТРИ» на цифровой основе был создан Государственный первичный эталон единицы коэффициента гармоник в диапазоне (0,001...100) % для сигналов с основной гармоникой в диапазоне частот (10...200000) Гц (ГЭТ 188-2010). Основу ГЭТ 188 составляют измеритель коэффициента гармоник эталонный (ИКГЭ) и калибратор коэффициента гармоник эталонный (ККГЭ) [20].

ИКГЭ содержит 24-разрядный сигма-дельта АЦП. Он обеспечивает динамический диапазон, свободный от гармоник (SFDR) до 120 дБ. ИКГЭ формирует выборку из  $N$  цифровых отсчётов, соответствующих мгновенным значениям входного сигнала, и записывает её в промежуточной памяти. Максимальное число отсчётов в выборке — 1 048 576. Максимальная частота дискретизации — 2,5 МГц и может меняться в зависимости от частоты основной гармоники. Программа управления и обработки информации внешнего компьютера производит цифровую обработку каждой выборки, определяет амплитуды гармоник и их начальные фазы. Максимальное число вычисляемых гармоник — 10. Для определения амплитуд гармоник применяется формула (4).

Измерения коэффициента гармоник проводятся сериями. Оператором задаётся количество измерений в серии. Программа управления и обработки информации вычисляет среднее значение коэффициента гармоник в серии и СКО среднего.

Калибратор ККГЭ построен по принципу цифрового синтеза и формирует выходной гармонический сигнал с заданным Кг, содержащий сразу основную и высшие гармоники. Оператором задаётся частота основной гармоники, количество гармоник (максимальное количество гармоник 10), распределение амплитуд гармоник по частоте («равномерно спадающее», «равновеликое», с заданием амплитуды каждой гармоники). Блок-схема ККГЭ приведена на рис. 9. В зависимости от заданных условий программа IBM PC формирует код частоты, таблицу формы сигнала и передаёт её процессору

ADSP-BF537, а тот, в свою очередь, размещает таблицу в ОЗУ. Кроме того, ADSP-BF537 выполняет функции фазового аккумулятора. Модуль синхронизации представляет собой синтезатор, который формирует тактовые импульсы  $F_{clk}$ , задающие скорость обновления информации для ЦАП, и другие необходимые тактовые импульсы. В зависимости от частоты основной гармоники, скорость изменения кода в фазовом аккумуляторе устанавливается такой, при которой образуется минимальное количество побочных спектральных компонентов из-за усечения кода фазы и которая наиболее благоприятна для подавления гармоник «отражённых» от частот  $nF_{clk}$ .

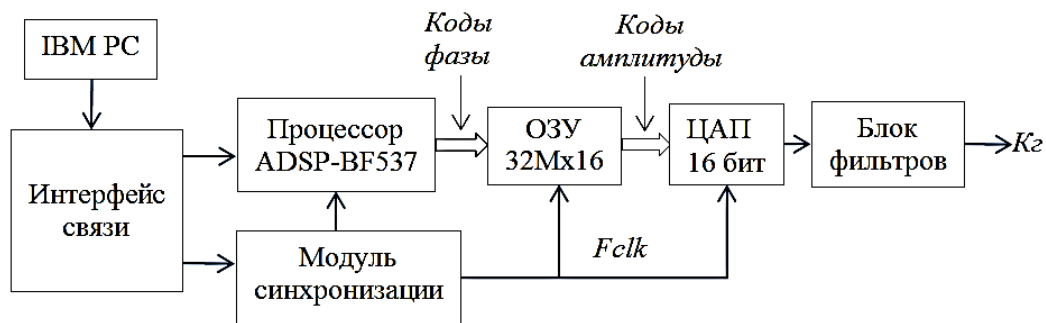


Рис. 9. Блок-схема ККГЭ

Для уменьшения погрешности воспроизведения калибратором ККГЭ заданного коэффициента гармоник проводится коррекция формы его сигнала с помощью ИКГЭ. В первом приближении формируется таблица формы сигнала для ККГЭ в соответствии с выражением:

$$U_o(T_i) = \sum_1^{10} U_{o_k} \sin(2\pi k f T_i),$$

где  $U_{o_k}$  — расчётные амплитуды гармоник по заданному коэффициенту гармоник и закону распределения по частоте;  $f$  — частота первой (основной) гармоники;  $T_i$  — дискретные моменты времени.

Сигнал, синтезированный на основе приближенной таблицы формы сигнала, подаётся на вход ИКГЭ, анализируется, определяются амплитуды, начальные фазы содержащихся в нем гармоник и отклонение получившегося значения коэффициента гармоник от заданного. Исходя из этих данных, программным способом вычисляются скорректированные амплитуды  $U_k$  и начальные фазы  $\varphi_k$  гармоник. Используя эти амплитуды и начальные фазы гармоник, программа формирует новую таблицу формы сигнала в соответствии с выражением:

$$U(T_i) = \sum_1^{10} U_k \sin(2\pi k f T_i + \varphi_k).$$

На основе этой таблицы в ККГЭ создаётся скорректированный сигнал. Таким образом, погрешность воспроизведения единицы коэффициента гармоник с помощью ККГЭ приближается к погрешности измерений ИКГЭ.

Эталон обеспечивает воспроизведение единицы коэффициента гармоник с неисключённой систематической абсолютной погрешностью  $\theta$  в диапазоне  $(1 \cdot 10^{-4} \dots 4 \cdot 10^{-2})$  %. Значения НСП  $\theta$  в зависимости от частоты основной гармоники и измеряемого коэффициента гармоник приведены в табл. 2.

Таблица 2

Абсолютная неисключённая систематическая погрешность измерений коэффициента гармоник ( $K_g$ ) в зависимости от частоты и измеряемого  $K_g$ , %

$f$ , Гц	$K_g$ , %					
	0,001	0,01	0,1	1	10	100
10	0,00071	0,00071	0,00071	0,00083	0,0043	0,042
100	0,00015	0,00016	0,00016	0,00045	0,0042	0,042
1 000	0,00010	0,00010	0,00011	0,00043	0,0042	0,042
20 000	0,00056	0,00056	0,00056	0,00070	0,0042	0,042
100 000	0,00056	0,00056	0,00056	0,00070	0,0042	0,042
200 000	0,00084	0,00084	0,00084	0,00094	0,0043	0,042

Среднеквадратическое отклонение результата измерений  $S$  для десяти независимых измерений не превышает рассчитанное по формулам:

$$S = 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot K_g + 5 \cdot 10^{-6} \% \text{ для значений } K_g = (0,001; 0,01; 0,1; 1; 10) \%;$$

$$S = 3 \cdot 10^{-3} \% \text{ для значения } K_g = 100 \%.$$

*Выводы.* При переходе к цифровой обработке сигналов (ЦОС) необходимо разрешить ряд задач. Во-первых, требуется, исходя из заданной точности измерений, определить требования к качеству входных и выходных каналов прибора, в том числе разрядность АЦП и ЦАП, частоту дискретизации сигнала, объём накапливаемых выборок, разрядность коэффициентов окон и т.д. Такая задача не является тривиальной, поскольку необходимо установить взаимосвязь между точностью выходных и входных сигналов обрабатывающей системы (алгоритмов). Во-вторых, необходимо провести анализ используемых методов ЦОС и оценить их свойства с точки зрения влияния на точность получаемых результатов. Дело осложняется тем, что при выборе и адаптации алгоритмов необходимо учитывать вопросы реализации исследуемых методов на современной микропроцессорной технике. В частности, приходится учитывать весьма тонкие эффекты, связанные с конечной точностью вычислений, а также общее быстродействие системы, работающей в режиме реального времени.

### Литература

1. Петров Н.Б. Некоторые погрешности аналого-цифрового измерения нелинейных искажений // Измерительная техника. 1979. № 5. С. 51.
2. Минц М.Я., Чинков В.Н. Оценка погрешности дискретизации цифровых измерительных приборов, основанных на цифровой обработке мгновенных значений сигналов // Метрология. 1987. № 11. С. 43–49.
3. Минц М.Я., Чинков В.Н. Микропроцессорные измерители нелинейных искажений: алгоритмы цифровой обработки измерительного сигнала и оценка погрешностей // Измерительная техника. 1995. № 4. С. 56–59.
4. Минин В.И., Чулин С.Л. Искажения в спектральной области при цифровом представлении гармонического сигнала // Радиотехника. 1994. № 12. С. 51–52.
5. Альтман Е.А., Елизаров Д.А. Исследование методов определения частоты одно тонального сигнала // Известия Транссиба. 2010. № 4. С. 103–111.
6. Белецкая С.Ю., Гнездилов Д.С., Крыжко И.Б., Токарев А.Б. Измерение частоты гармонического сигнала методом сравнения с эталонами // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014. № 1. Т. 10.
7. Ren J., Kezunovic M. An improved Fourier method for power system frequency estimation / Conference: North American Power Symposium (NAPS). 2011.
8. Chen X., Zhang Y. Detection and Analysis of Power System Harmonics Based on FPGA / Wireless Communications and Applications: First International Conference, ICWCA. 2011.
9. Harris F.J. On the use of windows for harmonic analysis with the Discrete Fourier // Transform Proceedings of the IEEE. January 1978. V. 66. No 1. P. 51–83.
10. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
11. Глинченко А.С. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие: в 2 ч. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2001.
12. Ридико Л.И. DDS: прямой цифровой синтез частоты // Компоненты и технологии. 2001. № 7. С. 50–54.
13. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986.
14. Tierney J., Rader C.M., Gold B. A Digital Frequency Synthesizer // IEEE Transaction of Audio Electroacoustics. 1971. P. 48–57.
15. Зайцев Г.В. Влияние джиттера тактовой частоты на характеристики аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей // Цифровая обработка сигналов. 2010. № 1. С. 31–37.
16. Платонов Ф.А., Ахромеева Е.О., Бабарыкин В.А., Пругло А.В., Безденежных С.В., Каминский О.В., Стальнова К.А. // Измерительная техника. 2016. № 3. С. 3–6.