**УДК 530.145.6:521.176**

# КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПРОБНОГО ТЕЛА В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

**А.Н. Малимон**

*ФГУП «ВНИИФТРИ», Менделеево, Московская обл.*
*amalimon@vniiftri.ru*

*В работе проанализированы способы придания ньютоновскому закону тяготения математической формы, соответствующей предположению о квантовом характере гравитационной силы. Рассмотрены теоретические модели двух типов квантовых осцилляторов, у одного из которых спектр энергий прямо пропорционален, а у другого обратно пропорционален расстоянию между тяготеющими массами. Для описания на квантовом языке связанного движения пробного тела m в поле большой массы M предложено волновое уравнение шрёдингеровского типа, в котором роль постоянной Планка играет гравитационный параметр действия. Рассмотрены решения этого уравнения, которые определяют радиусы орбит $r_n$ пробного тела и спектр энергетических уровней $E_n$. Получено квантовое выражение для ньютоновской силы тяготения, действующей на пробную массу m, которое соответствует классической её величине.*

*Ключевые слова: квантование в гравитационно-связанной планетарной системе, уравнение Шрёдингера с гравитационным параметром действия, дуальная волновая механика.*

# QUANTUM-MECHANICAL INTERPRETATION OF ORBITAL MOVEMENT OF TEST BODY IN CENTROSYMMETRICAL GRAVITATIONAL NEWTONIAN POTENTIAL

**A.N. Malimon**

*FSUE "VNIIFTRI", Mendeleevo, Moscow region*
*amalimon@vniiftri.ru*

*In this article author analyzes the ways of giving the Newtonian law of gravitation a mathematical form corresponding to the assumption of the quantum nature of the gravitational force. Theoretical models of two types of quantum oscillators are considered, for one of which the energy spectrum is directly proportional, and for the other it is inversely proportional to the distance between gravitating masses. Author proposes Schrödinger-type wave equation to describe in quantum language the bound motion of a test body m in a field of large mass M. In this equation the gravitational action parameter plays the role of the Planck's constant. The solutions of this equation determine the radius of the orbits $r_n$ of the test body and the spectrum of energy levels $E_n$. A quantum expression is obtained for the Newtonian gravitational force acting on the test mass m. This expression corresponds to its classical value.*

*Key words: quantization in a gravitationally bound planetary system, Schrödinger equation with gravitational action parameter, dual wave mechanics.*

## Введение

На концептуальном уровне есть существенное отличие классической механики Ньютона и квантовой механики Шрёдингера. В механике Ньютона используется понятие силы, а в квантово-волновой теории понятие силы исключено из числа основных концепций. Основные понятия в квантовой теории — импульс и энергия. Давид Бом объяснял это тем, что соотношение Планка $E = \hbar\omega$ и де-Бройля $p = \hbar / \lambda$, лежащие в основе квантовой механики, дают простую взаимосвязь между энергией $E$ и частотой $\omega$, а также между импульсом $p$ и длиной волны $\lambda$. Таких простых соотношений между волновыми свойствами материи и силой в традиционной квантовой механике нет [1].

Особенностью квантовой механики является то, что она ввела представление о квантовом характере действия и стала оперировать константой $h$, имеющей смысл кванта действия. Использование при описании атомных спектров понятия о кванте действия и о фотоне $\hbar\omega$ позволило создать новый язык и математический формализм квантовой теории, которые стали основой квантовой электродинамики и дали импульс развитию электрослабой теории и хромодинамики.

Сейчас для классического описания тяготения используют константу $G$, а в уравнениях ОТО фигурирует эйнштейновская постоянная $æ = 8\pi G / c^4$ с размерностью обратной размерности силы. Константы $G$ и $æ$ не несут какого-либо квантового смысла. Поэтому затруднительно создать язык квантовых понятий и логику теории для квантового описания гравитации, если используемые в ней основные константы не имеют сами по себе квантового содержания [2, 3].

Наряду с классическими теориями, использующими константы $æ$ и $G$, можно развить язык теории с константой $F_0 \sim æ^{-1}$, которая обратно пропорциональна эйнштейновской и имеет размерность силы. Для оценки перспектив развития квантового языка такой теории необходимо при выборе константы $F_0$ рассмотреть способы математической формализации квантования гравитационной силы. Во-первых, можно принять, что любая сила $F$ кратна целому числу $n$ квантов минимальной силы $Ћ$, то есть $F = nЋ$. Во-вторых, необходимо рассмотреть вариант, что любая сила $F$ является дробной частью предельной максимально возможной силы $F_{\max}$, то есть $F = F_{\max} / n$.

Представление о квантовом характере силы порождает идею дуальной волновой механики. В ней наряду с квантованием действия должно рассматриваться квантование силы [2–4]. И в связи с этим в дуальной волновой механике необходимо рассматривать в качестве квантов энергии поля не только фотоны, но и кванты с энергией, прямо либо обратно пропорциональной расстоянию между тяготеющими массами. Если в рамках такого подхода будут найдены дуальные волновые уравнения для системы тяготеющих

масс, то это откроет, в частности, возможность описания в терминах волновых функций слабого гравитационного поля Земли и движения масс в её поле тяготения.

В настоящей работе проведено исследование, основной целью которого является поиск формы волнового уравнения для описания орбитального движения тела в гравитационном поле. На основе такого волнового уравнения можно разработать новые модели вероятностного прогнозирования эфемерид навигационных спутников и создать таким образом условия для проведения более точных координатно-временных измерений на Земле и в ближайшем космосе.

Любая фундаментальная теория должна основываться на дуальных взаимодополняющих противоположностях. Дуальность в разных формах должна быть присуща и квантовой механике, являющейся одним из оснований современной физики. Это было осознано, когда была понята важная роль дуальностей для реализации перехода от различных видов струнных теорий к формулировке общей *M*-теории [5]. В связи с этим Эдвард Виттен заявил о необходимости переплетения квантовой механики симметриями дуальности. А Брайан Грин отмечал, что необходима переформулировка принципов квантовой механики, так как это может привести к более мощному формализму. Но позже он отметил, что никто не знает, как это сделать [5].

Актуальной задачей современной теоретической физики является создание новой квантовой механики «переплетённой симметриями дуальности». В настоящей работе при рассмотрении планетарной модели, квантовомеханически описывающей гравитационно-связанное движение пробного тела, использована методология, дуально дополняющая методы и понятия шрёдингеровской волновой механики, применяемой для описания водородоподобного атома. Модель вводит гравитационный параметр действия $h_g$ — новое ключевое понятие в языке дуальной волновой механики, которое необходимо для описания орбитального движения в крупномасштабных системах. Представление о гравитационном параметре действия $\hbar_g$ в гравитационно-связанной планетарной системе двух тел дуально дополняет понятие кванта действия $\hbar$ квантовой электродинамики.

## 1. Способы квантовой формализации закона тяготения Ньютона

Согласно ньютоновскому закону гравитационная сила $F$ взаимодействия двух масс равна:

$$F = \frac{GMm}{x^2},$$

где $G$ — гравитационная постоянная; $x$ — расстояние от центра массы $M$ до точечной пробной массы $m$. Соответственно потенциальная энергия $U$ массы $m$ в гравитационном поле:

$$U = -\frac{GMm}{x}.$$

Сделаем предположение о квантовом характере силы тяготения и формализуем его математически. Реализовать это можно двумя способами.

Во-первых, можно аксиоматически определить квант силы *Ћ* — минимальный дискретный шаг изменения гравитационной силы. Тогда сила притяжения *F* пробной массы *m*, находящейся в гравитационном поле большой массы *M*, должна быть равна целому числу *N* квантов силы $F = N\text{Ћ}$. Из требования размерности следует, что при постоянстве гравитационного параметра *GM* квантовое число *N* будет функцией расстояния $x_N$, массы *m* и величины кванта силы *Ћ*, то есть $N = f(x_N, m, \text{Ћ})$. С учётом определения кванта силы ньютоновский закон тяготения примет вид:

$$F_N = \frac{GMm}{x_N^2} N\text{Ћ}.$$

Соответственно потенциальная энергия массы *m* в гравитационном поле массы *M*:

$$U_N = -\frac{GMm}{x_N} = -N\text{Ћ}x_N. \qquad (1)$$

Второй способ формализации квантового характера тяготения масс может основываться на выдвинутом в рамках логики ОТО предположении о существовании не только предела для максимальной скорости *c*, но также предела для максимальной силы [6, 7]. Этой силе соответствует комбинация констант *c* и *G*:

$$F_{\max} = \frac{c^4}{G} \approx 10^{44} N. \qquad (2)$$

Из определения (2) следует, что порождать множество разных дискретных величин гравитационной силы $F_n$ могут дробные части максимально возможной силы, получаемые в результате деления её на целые числа *n*:

$$F_n = \frac{F_{\max}}{n}.$$

Такой способ введения квантования силы, а точнее сказать, квантового дробления максимальной силы, приводит к форме закона Ньютона:

$$F_n = \frac{GMm}{x_n^2} = \frac{c^4}{Gn^p} \cdot \beta(m, M), \qquad (3)$$

где показатель степени $p \geq 2$ и $K(m, M)$ — безразмерный коэффициент, который должен быть пропорционален массе *m*. С учётом требований размерности коэффициент β должен быть функцией отношения масс *m* и *M*. Соответственно, на основании (1) потенциальная энергия массы *m*, движущейся по круговой орбите в гравитационном поле массы *M*:

$$U_n = -\frac{GMm}{x_n} = -F_n x_n. \tag{4}$$

В завершение раздела рассмотрим ещё одну возможность, которая также приводит к квантовой форме закона тяготения Ньютона. Для этого определим новое понятие дуальной волновой механики, которое назовём гравитационным параметром действия $\hbar_g$ для пары масс $M$ и $m$ — участников взаимосвязанного движения:

$$\hbar_g = \frac{GMm}{c}. \tag{5}$$

Гравитационный параметр $\hbar_g$, имеющий размерность действия, — это дуальный аналог кванта действия $\hbar$ квантовой электродинамики:

$$\hbar = \frac{e^2}{ac},$$

где $e$ — заряд электрона; $\alpha$ — постоянная тонкой структуры. Отметим, что квант действия (постоянная Планка) является универсальной константой, которая в таком качестве фигурирует во многих соотношениях квантовой теории. Гравитационный параметр действия не имеет универсальной однозначно определённой величины. В каждой рассматриваемой задаче конкретное значение параметра $\hbar_g$ определяет величины взаимодействующих масс.

Введём также понятие об инверсном кванте энергии поля $\hbar_g\omega_i$ и поставим ему в соответствие потенциальную энергию гравитационного поля:

$$\hbar_g\omega_i = \hbar_g \frac{c}{x} \to -\frac{GMm}{x}, \tag{6}$$

где $\omega_i = \frac{c}{x}$. Запишем ряд соотношений, отражающих взаимосвязь полной $E$, потенциальной $U$ и кинетической $T$ энергий массы $m$ при её круговом движении вокруг $M$:

$$2E = U = -2T = -\frac{GMm}{x}. \tag{7}$$

Рассмотрим два выражения для потенциальной энергии (1) и (4) и сравним их с третьим выражением для потенциальной энергии, которое следует из (6) и (7):

$$U_N \propto Ньx_N, \quad U_n \propto F_n x_n, \quad U_n \propto \hbar_g \frac{c}{x_n}. \tag{8}$$

Два первых выражения в (8) формально аналогичны — энергия соответствующих им квантов пропорциональна расстоянию между массами. У инверсного кванта $\hbar_g\omega_i = h_g \frac{c}{x_n}$ его энергия обратно пропорциональна расстоянию $x_n$ между массами. Следовательно, для квантового описания системы

тяготеющих тел достаточно оперировать двумя видами квантов энергии. У одних энергия должна быть прямо пропорциональна, а у других — обратно пропорциональна расстоянию между массами.

Отметим, забегая вперёд, что на настоящем этапе исследований получена квантово-механическая форма выражения для закона тяготения Ньютона на основе представления о двух видах квантов $F_n x_n$ и $\hbar_g \frac{c}{x_n}$, фигурирующих в (8).

## 2. Волновое уравнение инверсного $\hbar_g$-осциллятора, имеющего спектр энергий, характерный для ньютоновского потенциала

Рассмотрим волновое уравнение осциллятора, в котором константой действия является не постоянная Планка $\hbar$, а гравитационный параметр действия $\hbar_g = GMm / c$:

$$\hbar_g^2 \cdot \frac{1}{2m} \cdot \frac{d^2\psi_g}{d\left(\frac{c}{\omega}\right)^2} + \left[E - \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{c}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{c}{\omega}\right)^2\right]\psi_g = 0. \qquad (9)$$

У волновой функции $\psi_g = \psi_g\left(\frac{c}{\omega}, \frac{c}{x}\right)$ в качестве переменной выступает координата $\frac{c}{\omega}$, имеющая размерность длины, а $\frac{c}{x}$ — это параметр с размерностью частоты.

Если провести замену $\frac{c}{\omega} = x_i$ и $\frac{c}{x} = \omega_i$, то (9) приобретёт форму уравнения квантового гармонического осциллятора. Квантовый гармонический осциллятор даёт представление о кванте энергии поля $\hbar\omega$. Следовательно, уравнение (9) генерирует спектр значений энергии, соответствующий инверсным квантам $\hbar_g\omega_i$:

$$E = \hbar_g \omega_i \left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar_g \frac{c}{x}\left(n + \frac{1}{2}\right) \to -\frac{GMm}{x}\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad (10)$$

где $n$ = 0, 1, 2, 3… целое число. Отметим, что разность энергий $\Delta E$ двух соседних уровней инверсного $\hbar_g$-осциллятора обратно пропорциональна расстоянию $x$ между массами $M$ и $m$.

Результат (10) имеет важное методическое значение. Он показывает, что энергетический спектр, характерный для ньютоновского потенциала, может генерировать инверсный осциллятор, математически описываемый волновым уравнением Шрёдингера с гравитационным параметром действия.

Квантово-волновые представления квантовой механики сформировались после открытия Шрёдингером волнового уравнения, которое теоретически подтвердило и развило идею Планка о квантах энергии поля $E = \hbar\omega$ и гипотезу де-Бройля о волнах материи с длиной волны $\lambda = \hbar / p$. Но обратим внимание, что при квантовом описании атома энергия кулоновского потенциала — $e^2 / x$, не рассматривается в соответствующем уравнении Шрёдингера в качестве результата квантово-волнового процесса. В нём кулоновский потенциал поля представлен в качестве «чистого продукта» классической физики. В противовес этому результат (10) говорит о том, что ньютоновский потенциал — $GMm / x$, аналогичный кулоновскому, может иметь квантово-волновую природу, если он порождается уравнением Шрёдингера (9), которое рассматривает волны материи в инверсно-симметричном пространстве, имеющем инверсные координаты ($\omega_i$, $x_i$).

## 3. Волновое уравнение *Ћ*-осциллятора, имеющего спектр энергий, характерный для постоянного поля

В работе [4] предложено волновое уравнение осциллятора, в котором в качестве константы рассматривается квант силы *Ћ*:

$$Ћ^2 \cdot \frac{1}{2m} \cdot \frac{d^2\psi_Ћ}{d\omega^2} + \left[ E - \frac{m}{2} \cdot x^2 \cdot \omega^2 \right] \psi_Ћ = 0. \qquad (11)$$

У волновой функции $\psi_Ћ(\omega, x)$ в качестве переменной выступает $\omega$ с размерностью частоты, а параметр $x$ имеет размерность длины. Если произвести перестановку, сделав переменной $x$, а параметр $\omega$ рассматривать в качестве переменной и одновременно с этим заменить константу *Ћ* на квант действия $\hbar$, то уравнение (11) будет соответствовать форме уравнения квантового гармонического осциллятора.

Следовательно, с учётом перестановок уравнение (11) даёт спектр значений энергии квантового *Ћ*-осциллятора:

$$E = Ћx\left( N + \frac{1}{2} \right),$$

где $N$ = 0, 1, 2, 3… целое число. Отметим, что разность энергий $\Delta E$ двух соседних уровней *Ћ*-осциллятора прямо пропорциональна расстоянию $x$ между массами $M$ и $m$. Результат методически важен. Он демонстрирует то, что с помощью волнового уравнения (11) можно описать постоянное поле.

В уравнении (11) может быть применена и другая константа силы $F_0$, которая будет соответствовать масштабу области, в которой сила постоянна и близка величине $F_0$.

## 4. Волновое *GMm*-уравнение для описания орбитального движения пробной массы

Рассмотрим модель системы двух гравитационно-взаимодействующих масс $m$ и $M$, которые изолированы от действия внешних сил. Такая модель соответствует рассмотрению орбитального невозмущённого движения навигационного или астрометрического спутника Земли или любой другой пробной массы. Задача о движении двух взаимодействующих тел в классической и квантовой механике может быть сведена к описанию движения одного из них. Так как у пробного тела масса $m$ на много порядков меньше, чем у центральной массы $M$, то нет необходимости переходить к рассмотрению движения приведённой массы.

На квантово-механическом языке систему двух масс можно описать гамильтонианом движения пробного тела $m$ относительно центра массы $M$ и волновой функцией $\psi$. Но для этого необходимо найти такую форму гравитационного уравнения Шрёдингера, которая соответствует астрономическому масштабу расстояний $x$ между массами и величинам масс, рассматриваемых в задачах небесной механики. Уравнение Шрёдингера — это инструмент познания в масштабах микромира, что объясняется малостью кванта действия. Так, при описании водородоподобного атома это уравнение имеет вид:

$$\frac{\hbar^2}{2m_e}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(E+\frac{Ze^2}{x}\right)\psi=0. \qquad (12)$$

В уравнении (12) величины кванта действия $\hbar$, а также массы электрона $m_e$, заряда электрона $e$ и заряда ядра $Ze$ водородоподобного атома таковы, что пространственный масштаб создаваемой их взаимодействием потенциальной ямы, которая ограничивает движение электрона, приводит к ярко выраженному дискретному характеру его уровней энергии и радиусов орбит. Самый «крупный» атомный объект, рассматриваемый с помощью (12), — это ридберговский атом, находящийся на очень высоком уровне возбуждения $n \sim 1000$. Он имеет размер ~0,1 мм и время жизни ~1 с [8].

Минимальный масштаб спутниковых систем навигации и астрометрии более чем на 18 порядков превышает размер ридберговского атома. Поэтому обнаружение квантовых особенностей в движении пробного тела на фоне непрерывного множества орбит, допускаемых классической механикой, возможно только в том случае, если гравитационная константа действия в гравитационном уравнении Шрёдингера будет превышать по крайней мере на 40 порядков постоянную Планка.

Для квантово-механического описания гравитационно-связанного движения пробного тела $m$ в изолированной системе из двух масс $M$ и $m$ рассмотрим волновое уравнение с гравитационным параметром действия $\hbar_g$:

$$\frac{\hbar_g^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(E+\frac{GMm}{x}\right)\psi=0. \qquad (13)$$

Запишем волновое уравнение (13), введя в него выражение гравитационного параметра действия $\hbar_g=\dfrac{GMm}{c}$, в соответствии с определением (5):

$$\frac{(GMm)^2}{c^2}\cdot\frac{1}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(E+\frac{GMm}{x}\right)\psi=0. \qquad (14)$$

У волновой функции $\psi(x)$ в (14) переменная $x$ — это расстояние между пробным телом $m$ и центром массы $M$. Будем считать, что плотность распределения вещества в объёме массы $M$ сферически однородна и, следовательно, ньютоновский потенциал $U=-\dfrac{GMm}{x}$ в уравнении (14) является центрально-симметричным.

Решения гравитационного уравнения (14) могут быть получены, так как его форма соответствует уравнению для атома (12), решения которого известны. Представим соответствие дуальных аналогов физических понятий в гравитационном уравнении (14) и в уравнении (12), описывающем водородоподобный атом:

$$\begin{aligned} m &\rightarrow m_e;\\ \hbar_g^2=\left(\frac{GMm}{c}\right)^2 &\rightarrow \hbar^2;\\ GMm &\rightarrow Ze^2. \end{aligned} \qquad (15)$$

При движении электрона в центрально-симметричном кулоновском потенциале все состояния с разными $l$, но одинаковыми $n$ обладают одинаковой энергией. Поэтому одномерное уравнение (12) даёт радиусы орбит $x_n = r_{n_A}$ и спектр энергий $E_{n_A}$ атома, которые определяются только главным квантовым числом $n$ и не зависят от азимутального квантового числа $l$.

$$r_{n_A}=\frac{n^2\hbar^2}{m_e e^2 Z},\quad E_{n_A}=-\frac{m_e e^4 Z^2}{2n^2\hbar^2}, \qquad (16)$$

где $n$ = 1, 2, 3... — главное квантовое число.

Если ньютоновский потенциал в уравнении (14) является центрально-симметричным, то, воспользовавшись соответствием для дуальных аналогов (15) и выражениями (16) для радиусов орбит и энергетических уровней в атоме, можно получить выражения для радиусов орбит $r_n$ и спектра энергий $E_n$ квантовых уровней, которые дают уравнение (14) для гравитационно-связанной системы масс $m$ и $M$:

$$r_n=\frac{n^2GM}{c^2},\quad E_n=-\frac{mc^2}{2n^2}, \qquad (17)$$

где $n$ = 1, 2, 3... — главное квантовое число. При движении в центрально-симметричном ньютоновском потенциале энергия $E_n$ на уровне $n$ не зависит от орбитального числа $l$. Поэтому $r_n$ соответствует радиусу круговой орбиты либо большой полуоси эллипса.

На основании (17) запишем ряд квантовых соотношений, характеризующих движение пробной массы $m$ на $n$-й орбите в гравитационном поле, создаваемом массой $M$, и приведём вытекающие из них соотношения классической механики:

$$r_n = \frac{n^2 GM}{c^2} \rightarrow \frac{GM}{v_n^2}; \tag{18}$$

$$v_n^2 = \frac{c^2}{n^2} \rightarrow v_n = \pm\frac{c}{n}; \tag{19}$$

$$E_n = -\frac{mc^2}{2n^2} \rightarrow -\frac{GMm}{2r_n}; \tag{20}$$

$$U_n = -\frac{mc^2}{n^2} \rightarrow -\frac{GMm}{r_n}; \tag{21}$$

$$T_n = \frac{mc^2}{2n^2} \rightarrow \frac{GMm}{2r_n}; \tag{22}$$

$$\omega_n = \pm\frac{v_n}{r_n} = \frac{\pm c^3}{n^3 GM} \rightarrow \pm\sqrt[2]{\frac{2T_n}{mr_n^2}}; \tag{23}$$

$$F_n = \frac{mc^4}{n^4 GM} = \frac{F_{\max}}{n^4}\frac{m}{M} \rightarrow \frac{GMm}{r_n^2}; \tag{24}$$

$$K_n = r_n^3 \omega_n^2 = GM; \tag{25}$$

$$\Delta r_n = r_{n+1} - r_n = \frac{(2n+1)GM}{c^2} \simeq \frac{2nGM}{c^2}; \tag{26}$$

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{(2n+1)mc^2}{2n^2(n+1)^2} \simeq \frac{mc^2}{n^3}. \tag{27}$$

В соотношениях (18–27) используются следующие новые обозначения для квантовых понятий:

$v_n$ — скорость массы $m$ на $n$-й орбите;

$\omega_n$ — круговая частота массы $m$ на $n$-й орбите;

$F_n$ — ньютоновская сила тяготения, действующая на массу $m$ на $n$-й орбите;

$K_n$ — кеплеровский инвариант для $n$-й квантовой орбиты;

$\Delta E_n$ — разность энергий, соответствующая двум соседним орбитам;

$\Delta r_n$ — разность радиусов двух соседних орбит.

Предложенное волновое уравнение Шрёдингера (14) с гравитационным параметром действия и все вытекающие из него квантовые соотношения (17–27) согласуются с классическими характеристиками, которые даёт небесная механика, при описании связанного движения двух тяготеющих масс. В частности, кеплеровский инвариант для всех квантовых орбит $K_n$ равен гравитационному параметру $\mu = GM$ так же, как и у всего множества классических орбит.

Квантовые выражения (20–22) для полной энергии $E_n$, потенциальной $U_n$ и кинетической энергии $T_n$ соответствуют классическим.

При шрёдингеровском волновом рассмотрении классической задачи небесной механики квантовый характер приобретают не только энергия и радиусы квантовых орбит (18), но и скорость $v_n$ движения малой массы (19), которая равна дробной части максимальной скорости $c$, а также угловая частота (23).

Ньютоновская сила тяготения (24) также квантована — на квантовых орбитах она равна дробной части максимально возможной силы $F_{\max}$, о возможном существовании которой говорилось в разделе 1. Отметим, что в выражении (24) для $F_n$ отношение $m/M$ можно рассматривать как отношение квантовых чисел, пропорциональных величинам масс.

В выражениях (26) и (27) приведены разности радиусов орбит $\Delta r_n$ и энергий $\Delta E_n$ двух соседних уровней. Их правая часть соответствует $\Delta r_n$ и $\Delta E_n$ при больших значениях квантовых чисел $n >> 1$. Представим разность $\Delta E_n$ двух соседних уровней энергии малой массы $m$ в виде кванта энергии $\hbar_g \omega_n$:

$$\Delta E_n = \frac{(2n+1)mc^2}{2n^2(n+1)^2} = \hbar_g \omega_n \qquad (28)$$

Этой разности двух соседних уровней энергии $\hbar_g \omega_n$ при больших значениях квантовых чисел $n >> 1$ (т.е. в квазиклассическом случае) можно поставить в соответствие излучённые или поглощённые кванты энергии с частотой $\omega$, равной классической частоте в системе:

$$E = \hbar_g \omega. \qquad (29)$$

О квантах $\hbar_g \omega$ (без указания квантового индекса у частоты $\omega_n$) можно говорить потому, что при больших значениях $n$ энергия (28) квантов $\hbar_g \omega_n$ изменяется медленно и в каждом небольшом участке спектра уровни энергии расположены эквидистантно, через одинаковые промежутки $\hbar_g \omega$. Таким образом, соотношение (29) вводит для гравитационно-связанной системы двух тел представление о квантах энергии поля $\hbar_g \omega$, которые подобны квантам электромагнитной энергии $\hbar\omega$. В логике понятий дуально-волновой механики эти два кванта можно рассматривать как дуально симметричную пару.

Энергия квантов $\hbar_g \omega$ пропорциональна параметру гравитационного действия $\hbar_g$ и классической угловой частоте $\omega$ (т.е. её первой гармонике) в связанной системе масс $m$ и $M$. В квантовой теории атома также рассматривает-

ся квазиклассическое движение в центрально-симметричном поле и то, как энергия перехода может соотносится с классической частотой системы. При больших значениях квантовых чисел квантовая система атома может рассматриваться квазиклассически, и для неё характерны переходы между различными уровнями энергии, которые могут не только быть равны, но и быть целыми кратными (т.е. быть гармониками) классической частоты системы [9]. Рассмотрению возможности целочисленно кратных классической частоте переходов в гравитационно-связанной системе — это предмет будущих исследований возможной модификации и развития гравитационного уравнения (14).

## 5. Характеристики квантовых орбит в поле тяготения Земли и Солнца

В соответствии с полученными выражениями (18) и (26) можно оценить номера уровней $n$ и расстояние между квантовыми орбитами $\Delta r_n = r_{n+1} - r_n$ на различном удалении от Земли.

На высоте от поверхности Земли 220–36 000 км ($r_n$ = 6 600 – 42 200 км), характерной для орбит большинства искусственных спутников, могут находиться квантовые уровни гравитационного поля Земли, у которых:

- номер главного числа квантового уровня будет в пределах $n = 3{,}8 \cdot 10^4 - 9{,}8 \cdot 10^4$;
- расстояние между уровнями будет в пределах $\Delta r_n$ = 330 – 870 м.

Расстоянию, соответствующему удалению Луны от Земли — 384 000 км, могут соответствовать номера квантовых уровней Земли $n \simeq 2{,}9 \cdot 10^5$, которые будут разделены расстоянием $\Delta r_n \simeq 2{,}6$ км.

Подобные оценки для квантовых орбит Солнца в диапазоне расстояний от Меркурия до Седны ($r_n$ = 0,38 – 541 а.е.) дают:

- номер главного квантового числа лежит в пределах $n = 6{,}0 \cdot 10^3 - 2{,}3 \cdot 10^5$;
- расстояние между уровнями в пределах $\Delta r_n = 1{,}8 \cdot 10^4 - 6{,}9 \cdot 10^5$ км.

Оценки показывают, что орбитам в системе спутников Земли и в системе спутников Солнца соответствуют номера главных квантовых чисел в диапазоне $6 \cdot 10^3 < n < 7 \cdot 10^5$. Состояния, относящиеся к дискретному спектру энергии квантовой системы, имеющие такие большие значения квантового числа $n$, являются квазиклассичными.

Отметим, что диапазон квантовых чисел ограничен сверху и снизу. Нижняя граница соответствует первой космической скорости пробного тела, когда тело может покинуть центральную массу и оказаться на самых низких относительно долгоживущих орбитах. Верхняя граница соответствует движению пробного тела на таком удалении от центральной массы, когда возмущающие факторы от третьих тел превысят действие тяготения центральной массы, что приведёт к медленному покиданию пробным телом потенциальной гравитационной ямы центральной массы по спиральной траектории.

Можно предположить, что так как расстояние (26) между уровнями $\Delta r_n$ растёт пропорционально $n$, то дискретные шаги квантового потенциала можно будет экспериментально выявить и измерить при движении пробной массы на большом удалении от центральной массы $M$ в слабом гравитационном поле.

Теоретический результат (26) для величины $\Delta r_n$ получен для случая идеальной центрально-симметричной формы ньютоновского потенциала. Но нешарообразность Земли и неоднородное распределение в ней масс искажают центральную симметрию её потенциала в окружающем пространстве. Это может привести к размыванию идеальной формы квантовых орбит на величину, сравнимую с расстоянием $\Delta r_n$ между ними, и, следовательно, «ретушировать» пространственную расквантованность орбит.

Теоретический ответ на вопрос о разрешении квантового характера орбитального движения можно получить, рассмотрев волновое уравнение в сферических координатах, которое должно учитывать особенности фигуры Земли и эллиптичность орбит, для чего необходимо ввести в потенциал соответствующий член с квантовым орбитальным числом $l$, характеризующим момент:

$$\frac{h_g^2}{2m} \cdot \Delta\psi + (E + U)\psi = 0,$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа в сферических координатах; $U$ — гравитационный потенциал с учётом несферичности ньютоновского потенциала, дополненный «центробежным потенциалом», учитывающим орбитальное движение и внешние факторы, возмущающие движение малой массы.

Завершая статью, отметим, что предложенная форма гравитационного уравнения Шрёдингера расширяет применение теоретических методов квантовой теории микромира в область гравитационно-связанных систем астрономических масштабов. Это имеет общефизическую и методическую ценность. Практическая ценность этого уравнения может быть реализована, если на его основе будут разработаны новые методы расчёта и измерений гравитационного поля Земли и орбит космических объектов, дополняя тем самым существующие классические методы.

## Заключение

До настоящего времени не существует общей теории или схем квантования гравитации, которые можно применить в широком круге физических задач. В рамках различных теорий существуют лишь подходы к квантованию гравитации в области их применимости. Чаще всего квантовое рассмотрение гравитации связано с космологическими объектами, которые характеризуются сверхсильными полями, либо с процессами в ранней Вселенной в планковских масштабах. Есть модели, рассматривающие квантование

гравиатомов — гипотетических квантовых объектов, состоящих из вращающейся мини-дыры (первичной чёрной дыры) и удерживаемой ею микрочастицы [10, 11].

Представленная работа не ставила своей целью квантование гравитации. Её целью был поиск гравитационной формы уравнения Шрёдингера, которое, используя язык и представления шрёдингеровской квантовой механики микромира, могло бы вероятностно описать крупномасштабное орбитальное движение тел в гравитационном поле Земли. До сих пор теоретическое описание кинематики околоземных астрометрических, гравиметрических и навигационных спутниковых систем осуществлялось только в рамках классических теорий.

После успешно завершённого теоретического поиска можно сказать, что гравитационное уравнение Шрёдингера найдено. Тем самым заложено основание нового направления по созданию теории совместных квантово-классических методов высокоточного описания кинематики в гравитационно-связанных системах, для которых характерны размеры, соответствующие задачам небесной механики.

Переход к квантовому описанию, продемонстрированный в настоящей работе, стал возможным благодаря введению в язык дуальной волновой механики нового понятия — параметра действия гравитационно-связанных масс. Теоретически определив гравитационный параметр действия, была найдена форма гравитационного уравнения Шрёдингера для областей космического пространства, которое осваивает современная цивилизация.

## Литература

1. Bohm D. Quantum theory. Prentice-Hall Inc. New York, 1952.
2. Малимон А.Н. Логика и язык дуальной волновой механики, рассматривающей квантовый характер не только действия, но и силы // Законодательная и прикладная метрология. 2012. Т. 120. № 5. С. 58.
3. Малимон А.Н. Результаты траекторных измерений космических зондов «Пионер» и их интерпретация в рамках модели дуальной волновой механики // Альманах современной метрологии. 2016. № 7. С. 13–38.
4. Malimon A.N. The Wave Equation for Oscillator with Planck's Constant and with a Quantum of Force // Phys. Chem. Earth (A). 1999. V. 24. No. 8. P. 721.
5. Green B.R. The Elegant Univerce. Superstrings, Hidden Dimensions and the Quest for the Ultimate Theory. N.Y.: Norton & Company Inc., 2003.
6. Shiller C. General relativity and cosmology derived from principle of maximum power of force [arxive: physics/060709v1. Jul 2006].
7. Gibbons G.B. The Maximum Tension Principle in General Relativity [arxive: hep-th/0210109v1. 11 Oct 2002].
8. Делоне Н.Б. Ридберговские атомы // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 4. С. 64–70.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, нерелятивистская теория. Т. 3. М.: Физматлит, 2017.
10. Fil'chenkov M.L., Laptev Yu.P. Graviatom dipole radiation // Gravitation & Cosmology. 2006. Vol. 12. No. 1. P. 65–68.
11. Лаптев Ю.П., Фильченков М.Л. Влияние девиттовского самодействия на дипольное излучение гравиатомов // Вести. РУДН. Сер. «Математика, информатика, физика». 2009. № 3 . С. 80–84.