

УДК 629.05

**МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ  
ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ  
НА ОСНОВЕ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ**

**Е.А. Рыбаков**

*ФГУП «ВНИИФТРИ», Менделеево, Московская обл.  
rybakov@vniiftri.ru*

*Статья посвящена решению задач обеспечения единства измерений в приоритетных направлениях экономики. Главное внимание уделяется дальнейшему совершенствованию эталонной базы в области радиоэлектронных измерений, повышению точности государственных эталонов, соответствующей международному уровню.*

*Ключевые слова: гравитационное поле Земли, поисковые алгоритмы, ускорение свободного падения, моментные функции.*

**METHOD OF INCREASING THE POSITIONING  
ACCURACY BY MEASURING THE PARAMETERS  
OF THE GRAVITATIONAL FIELD BASED  
ON MOMENT FUNCTIONS**

**E.A. Rybakov**

*FSUE "VNIIFTRI", Mendeleevo, Moscow region  
rybakov@vniiftri.ru*

*The article discusses a new approach in determining the location using Earth's gravity field measurements. It is based on the calculation of moment functions, which are subsequently used in pattern recognition algorithms. Based on this approach, an increase in the accuracy and efficiency is shown for the proposed method in comparison with classical correlation algorithms for the gravity field navigation.*

*Key words: Earth's gravitational field, gravity pattern recognition, gravity acceleration, moment functions.*

Алгоритмы навигации по гравитационному полю Земли (ГПЗ) разделяются на два типа — беспойсковые и поисковые. Беспойсковые алгоритмы работают на основе калмановской фильтрации и используются для уточнения местоположения потребителя на маршруте движения [1]. Для первоначального поиска исходной точки навигации используются поисковые алгоритмы. Они работают на основе вычисления корреляционной функции или интегральной квадратической разности между измеренными значениями параметров ГПЗ и соответствующей карты.

Задача навигации в поисковых алгоритмах формулируется следующим образом.

Известна карта ускорения свободного падения по маршруту движения  $g^{\text{карт}}$ , длина которого составляет  $L$  (рис. 1). Объект навигации движется по этому маршруту и производит измерения УСП на борту  $g_{\Delta L}^{\text{изм}}$ . Длина интервала набора измерений для осуществления коррекции фиксированная и равна  $\Delta L$ . Будем называть этот интервал интервалом коррекции. Задача навигации заключается в определении наилучшего соответствия измерений параметров ГПЗ на интервале коррекции  $g_{\Delta L}^{\text{изм}}$  значениям на карте  $g^{\text{карт}}$ .

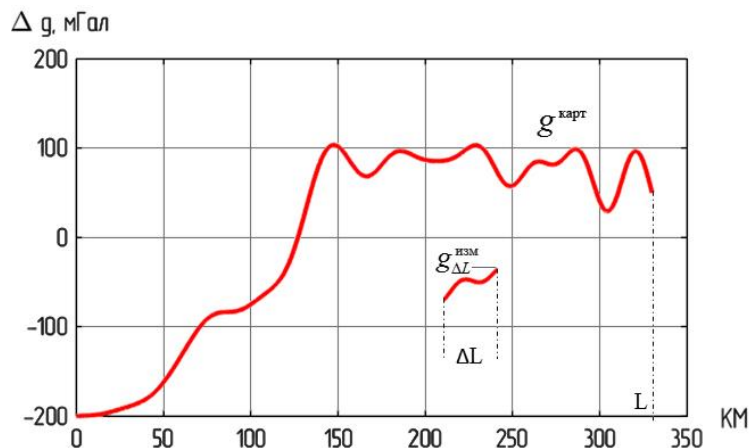


Рис. 1. Приращение УСП по маршруту

В общем случае при малых интервалах коррекции значения корреляционной функции и интегральной квадратической разности являются многоэкстремальными, поэтому однозначное определение местоположения затруднительно. В таких случаях для повышения точности определения местоположения предлагается использовать моменты высших порядков.

Для иллюстрации этого предположения возьмём набор измерений на борту  $g_{\Delta L}^{\text{изм}}$  с длиной  $\Delta L = 15$  км и два интервала на карте  $g^{\text{карт}1}$  и  $g^{\text{карт}2}$  с такой же длиной (рис. 2).

Определим моментные функции порядка  $m, n \in \mathcal{N}$  для дискретных реализаций случайных величин  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  и  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ . Физическими реализациями величин  $A$  и  $B$  в нашем случае могут быть измерения параметра ГПЗ и его значения на карте. Моменты определяются следующим выражением [2]:

$$M[(A)^m, (B)^n] = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [(a_i)^m, (b_i)^n], \quad (1)$$

где  $M[(A)^m, (B)^n]$  — начальная моментная функция порядка  $m, n$ .

Рассчитаем значения моментных функций для  $g_{\Delta L}^{изм}$ ,  $g^{карт1}$  и  $g^{карт2}$  согласно (1) по реальному участку карты, представленному на рис. 2. Результаты вычислений представлены в таблице 1.

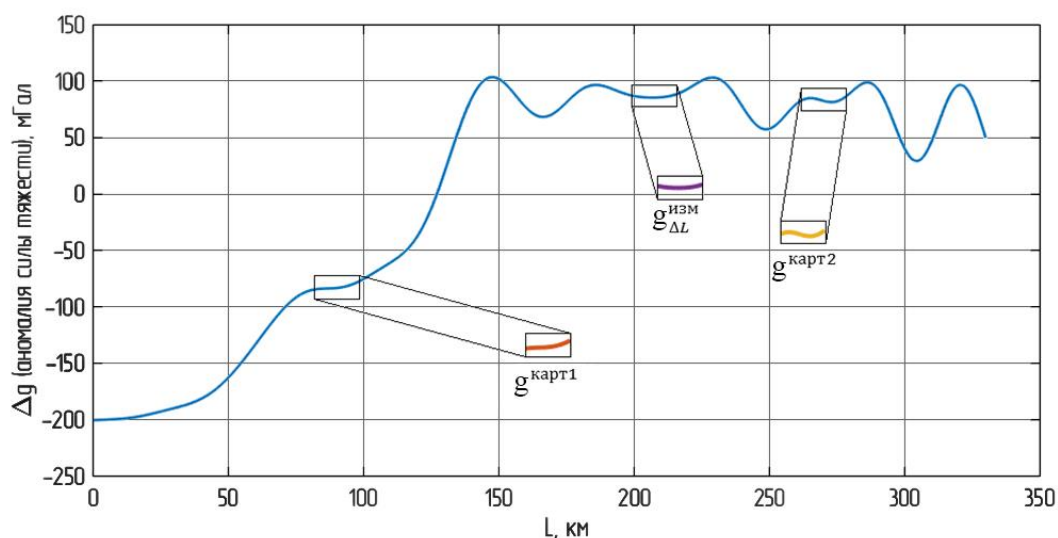


Рис. 2. Набор бортовых измерений и два участка карты  $\Delta L = 15$  км

Таблица 1

Результаты вычисления моментных функций

Порядок моментных функций		Набор измерений	$M[(g^{карт\ x})^m, (g_{\Delta L}^{изм})^n]$	Условное обозначение $M_{mn}^{I,II}$
$m$	$n$			
1	1	Карта 1: $g^{карт1}$	$\frac{M[(g^{карт1})^1, (g_{\Delta L}^{изм})^1]}{\max(M[(g^{карт1})^1, (g_{\Delta L}^{изм})^1])} = 0,0819$	$M_{11}^I$
		Карта 2: $g^{карт2}$	$\frac{M[(g^{карт2})^1, (g_{\Delta L}^{изм})^1]}{\max(M[(g^{карт2})^1, (g_{\Delta L}^{изм})^1])} = 0,0832$	$M_{11}^{II}$
1	2	Карта 1: $g^{карт1}$	$\frac{M[(g^{карт1})^1, (g_{\Delta L}^{изм})^2]}{\max(M[(g^{карт1})^1, (g_{\Delta L}^{изм})^2])} = 0,1880$	$M_{12}^I$
		Карта 2: $g^{карт2}$	$\frac{M[(g^{карт2})^1, (g_{\Delta L}^{изм})^2]}{\max(M[(g^{карт2})^1, (g_{\Delta L}^{изм})^2])} = 0,2498$	$M_{12}^{II}$

Продолжение таблицы 1

Порядок моментных функций		Набор измерений	$M[(g^{\text{карт } x})^m, (g_{\Delta L}^{\text{изм}})^n]$	Условное обозначение $M_{mn}^{\text{I,II}}$
$m$	$n$			
2	1	Карта 1: $g^{\text{карт1}}$	$\frac{M[(g^{\text{карт1}})^2, (g_{\Delta L}^{\text{изм}})^1]}{\max(M[(g^{\text{карт1}})^2, (g_{\Delta L}^{\text{изм}})^1])} = 0,0109$	$M_{21}^{\text{I}}$
		Карта 2: $g^{\text{карт2}}$	$\frac{M[(g^{\text{карт2}})^2, (g_{\Delta L}^{\text{изм}})^1]}{\max(M[(g^{\text{карт2}})^2, (g_{\Delta L}^{\text{изм}})^1])} = 0,0134$	$M_{21}^{\text{II}}$
2	2	Карта 1: $g^{\text{карт1}}$	$\frac{M[(g^{\text{карт1}})^2, (g_{\Delta L}^{\text{изм}})^2]}{\max(M[(g^{\text{карт1}})^2, (g_{\Delta L}^{\text{изм}})^2])} = 0,0147$	$M_{22}^{\text{I}}$
		Карта 2: $g^{\text{карт2}}$	$\frac{M[(g^{\text{карт2}})^2, (g_{\Delta L}^{\text{изм}})^2]}{\max(M[(g^{\text{карт2}})^2, (g_{\Delta L}^{\text{изм}})^2])} = 0,0253$	$M_{22}^{\text{II}}$

В таблице 1 моментные функции  $M_{11}^{\text{I}}$  и  $M_{11}^{\text{II}}$  (строка 1 и 2 таблицы 1) в литературе называются корреляционным моментом, и они являются значением корреляционной функции. Остальные моменты в таблице 1 называются моментами высших порядков.

Данные таблицы 1 подтверждают, что при исходном наборе измерений  $g_{\Delta L}^{\text{изм}}$  отличить участки  $g^{\text{карт1}}$  и  $g^{\text{карт2}}$  невозможно, поскольку  $M_{11}^{\text{I}} \cong M_{11}^{\text{II}}$ . Различие  $M_{11}^{\text{I}}$  от  $M_{11}^{\text{II}}$  составляет 1,5%, т.е. с использованием только корреляционной функции однозначно решить задачу определения местоположения невозможно.

Вместе с тем высшие моменты  $M_{12}^{\text{I}}$  и  $M_{12}^{\text{II}}$ ,  $M_{21}^{\text{I}}$  и  $M_{21}^{\text{II}}$ ,  $M_{22}^{\text{I}}$  и  $M_{22}^{\text{II}}$  отличаются между собой на 33%, 23% и 72% соответственно. Таким образом, на основе моментов высших порядков становится возможным разделить два участка карты.

В качестве одной из причин, почему высшие моменты не использовались ранее, в монографии В.В. Щербинина сказано: «В поисковых алгоритмах чаще всего используется корреляционный функционал как наиболее изученный и распространённый» [3]. Очевидно, что расчёт высших моментов создаёт дополнительную нагрузку на вычислительные средства объекта навигации. Однако для современной техники эти трудности не являются непреодолимыми, и поэтому в настоящее время корреляционно-экстремальная обработка изображений с использованием моментов высших порядков

широко применяется, например, при анализе двумерных изображений. В частности, она используется для автоматического распознавания кораблей по фотографиям, распознавания самолётов в оптическом и радиолокационном диапазонах и т.п. [4, 5].

Отмеченные обстоятельства подтверждают целесообразность разработки поисковых алгоритмов, учитывающих не только момент первого порядка — корреляционную функцию — но и моменты высших порядков. Эту задачу можно решать с помощью алгоритмов машинного обучения.

В данной постановке задача навигации делится на два этапа:

1. *Подготовительный этап*, на котором формируется обучающая выборка на основе вычисления моментных функций карты и происходит создание регрессионной модели; этот этап выполняется заблаговременно до начала движения.
2. *Этап навигации*, на котором вычисляются моментные функции на основе измерений и используется полученная на предыдущем этапе модель регрессии.

#### **Подготовительный этап**

1. Равномерное разбиение маршрута на пересекающиеся отрезки  $\Delta L$ , равные длине интервала коррекции. Пусть количество таких отрезков на маршруте  $N_{\Delta L}$ .

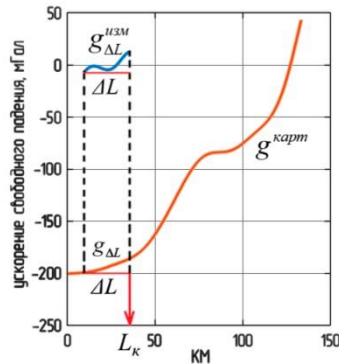
2. Для каждого интервала  $\Delta L$  определяется набор моментных функций  $\mu_{nkt}$  (набор параметров):

$$\mu_{nkt} = M\{(g_{\Delta L})^n, (F_t)^k\} = \sum [(g_i)^n \cdot (F_{ii})^k \cdot p(g_i, F_{ii})], \quad (2)$$

где  $M\{\}$  — оператор моментных функций;  $g_{\Delta L}$  — приращение УСП на интервале  $\Delta L$ ;  $F = \{F_1, F_2, \dots, F_f\}$  — набор ортогональных функций, где  $t = 1, 2, \dots, f$ ;  $p(g_i, F_{ii}) = 1 / N$  — совместная вероятность реализации значений  $g_i$  и  $F_{ii}$ .

Значения моментных функций  $\mu_{nkt}$ , совокупность которых уникальна для каждого  $\Delta L$ , будем относить к конечной точке этого отрезка (к точке  $L_k$ , рис. 3). В частном случае значения  $\mu_{111} \dots \mu_{11f}$  являются амплитудами гармоник разложения  $g_{\Delta L}$  по базису ортогональных функций  $\{F_1, F_2, \dots, F_f\}$ . В работе рассматривались следующие наборы базисных ортогональных функций: тригонометрические функции, функции Хаара, функции Добеши второго и третьего порядков и др. Исследования показали, что наивысшая точность достигается с использованием базисных функции Хаара, так как вычисленные с помощью них значения  $\mu_{nkt}$  имеют наибольшую энтропию.

В результате каждая точка  $x_i$  на маршруте навигации  $L$  характеризуется набором параметров  $M^i = \mu_{111}^i, \dots, \mu_{11f}^i, \mu_{211}^i, \dots, \mu_{nkf}^i$ , где  $i = 1 \dots N_{\Delta L}$ .

Рис. 3. Точка  $L_k$ , характеризующая интервал коррекции  $\Delta L$ 

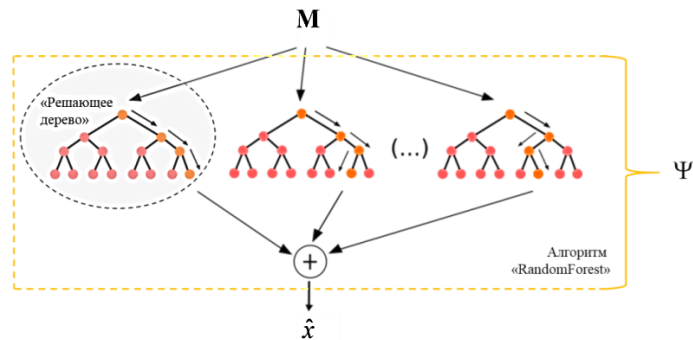
3. С помощью алгоритма *RandomForest*<sup>1</sup> определяется регрессионная модель, которая устанавливает соответствие между всеми координатами  $x_i$  на маршруте  $L$  и соответствующими наборами параметров  $M^i$ :

$$\hat{x} = \Psi(M) \quad (3)$$

так, чтобы значения  $\hat{x}_i$ , полученные в результате вычисления по регрессионной модели на основе  $M^i$ , удовлетворяли следующему критерию:

$$\frac{1}{N_{\Delta L}} \sum_{i=1}^{N_{\Delta L}} (\hat{x}_i - x_i)^2 \rightarrow \min.$$

Алгоритм *RandomForest* [6] основан на построении большого числа «решающих деревьев» (рис. 4), каждое из которых строится с помощью алгоритма CART (*Classification and Regression Tree*) по случайной выборке, получаемой из исходной. В алгоритме CART каждый узел дерева решений разделяет подвыборку на две части по параметру с наибольшей энтропией. Таким образом постепенно формируется связанное дерево решений.

Рис. 4. Интерпретация алгоритма *RandomForest*

<sup>1</sup> В работе исследовались следующие алгоритмы восстановления регрессии: метод наименьших квадратов, алгоритм *RandomForest*, метод ближайшего соседа, метод опорных векторов, *AdaBoost* и *CatBoost*. В задаче навигации по гравитационному полю алгоритм *RandomForest* показал наивысшую итоговую точность.

**Этап навигации**

На основе бортовых измерений приращения УСП  $g_{\Delta L}^{изм}$  (2) определяется набор параметров (моментных функций)  $\mu_{nkt}^{изм} = M\{(g_{\Delta L}^{изм})^n, (F_t)^k\}$ .

Определяется искомое местоположение объекта навигации  $x^{иск}$  на основе регрессионной модели (3):

$$x^{изм} = \Psi(M^{изм}), \tag{3}$$

где  $M^{изм} = \mu_{111}^{изм}, \dots, \mu_{11f}^{изм}, \mu_{211}^{изм}, \dots, \mu_{nkf}^{изм}$ .

Для сравнения двух методов — метода на основе определения максимума корреляционной функции и метода, предложенного в работе — было проведено моделирование зависимости точности навигации от длины интервала коррекции  $\Delta L$  для трассы, представленной на рис. 2. Для получения каждой точки на графике использовались измерения приращения УСП  $g_{\Delta L}^{изм}$  для  $N_i = 400$  случайных интервалов  $\Delta L$  соответствующей длины. Для каждого интервала определялись координаты объекта навигации с помощью корреляционного метода  $x^{кор}$  и с помощью предложенного метода  $x^{иск}$  (3). В качестве базисных функций использовались функции Хаара  $\{F_1, F_2, \dots, F_f\}$  с моментами высших порядков  $n = \{1, 2, 3\}, k = \{1\}$ .

Погрешность определения местоположения рассчитывалась по следующим соотношениям:

$$\delta X^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_i} (x_i^{ист} - x_i^{иск})^2}{N_i}}; \delta X^{кор} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_i} (x_i^{ист} - x_i^{кор})^2}{N_i}},$$

где  $\delta X^*, \delta X^{кор}$  — погрешность определения местоположения, полученная с помощью разработанного и корреляционного алгоритмов соответственно.

Результаты моделирования зависимости точности навигации от длины интервала коррекции  $\Delta L$  представлены на рис. 5.

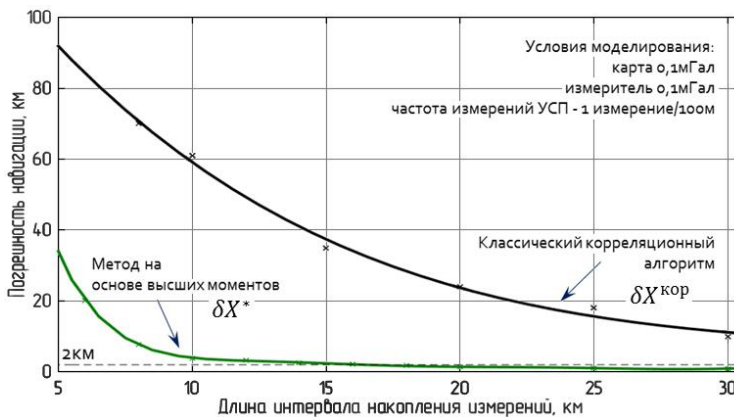


Рис. 5. Результаты моделирования — зависимость точности навигации от длины интервала коррекции при фиксированной погрешности карты и измерителя

Из рисунка 5 видно, что данный алгоритм позволяет при сохранении точности навигации уменьшить интервал коррекции по сравнению с классическим корреляционным алгоритмом.

### **Заключение**

Разработан поисковый алгоритм определения местоположения на основе статистических моментов высших порядков для комплексированной помехоустойчивой аппаратуры на основе НАП и технологий экстремальной корреляционной навигации по гравитационному полю Земли. Данный алгоритм позволяет уменьшить интервал коррекции без потери точности по сравнению с классическим корреляционным алгоритмом. Уменьшенный интервал коррекции позволяет более оперативно определять местоположение объекта навигации.

### **Литература**

1. Степанов О.А. Состояние перспективы развития и применения наземных систем навигации для подвижных объектов // Гироскопия и навигация. 2005. № 2. С. 95–121.
2. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. М.: Наука, 1976.
3. Щербинин В.В. Построение инвариантных корреляционно-экстремальных систем навигации и наведения летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 230 с.
4. Баклицкий В.К., Бочкарев А.М., Мусьяков М.П. Методы фильтрации сигналов / под ред. Баклицкого В.К. Радио и связь, 1986. 216 с.
5. Баклицкий В.К. Корреляционно-экстремальные методы навигации и наведения. Тверь: ТО «Книжный клуб», 2009. 360 с.
6. Шитиков В.К., Мاستицкий С.Э. Классификация, регрессия, алгоритмы Data Mining с использованием R [Электронный ресурс]. 2017. URL: [//github.com/ranalytics/data-mining](https://github.com/ranalytics/data-mining).