

## ОГРАНИЧЕНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ СТАНДАРТОВ ЧАСТОТЫ ФОНТАННОГО ТИПА, ВЫЗВАННОЕ ФАЗОВЫМ ШУМОМ ОПРОСНОГО СИГНАЛА

**М.С. Алейников**

ФГУП «ВНИИФТРИ», Менделеево, Московская обл.

aleinikov@vniiftri.ru

*В стандартах частоты фонтанного типа наряду с фундаментальными шумами, обусловленными флуктуациями при измерении внутреннего состояния рабочих атомов, существуют технические шумы, обусловленные шумами лазерной и детектирующей систем, а также системы формирования опросного сигнала. Проведенный анализ среди полученных результатов метрологических исследований в ряде различных лабораторий мира показывает, что именно шум опросного сигнала является доминирующим фактором, ограничивающим стабильность таких стандартов. В настоящей статье подробно исследуется обозначенная проблема и предлагаются способы ее решения в рамках анализа двух моделей опросного сигнала.*

*In frequency standards of the fountain type along with basic noise due to fluctuation in measurements of the inner state of working atoms there are technical noises due to noises of laser and detection systems and the system of forming an interrogated signal. The performed analysis among obtained results of the metrological research in some laboratories of the world shows that particularly the noise of the interrogated signal is a dominant factor limiting a stability of such standards. Designated problem is studied in detailed way in this article and solutions in the frame of the analysis of two models of the interrogated signal are proposed.*

*Ключевые слова: атомный стандарт, фундаментальный шум, технические шумы, частота часового перехода, квантовая система стандарта, метод Раби, метод Рэмси, две модели СВЧ синтезатора*

### **Введение**

Метрологические характеристики любых атомных часов определяются, прежде всего, ансамблем рабочих атомов, лежащих в основе построения самих часов. Флуктуации измеренного количества рабочих атомов в искомом квантовом состоянии характеризуют предельно достижимую нестабильность атомного стандарта. Связанные с этими флуктуациями шумы прибора носят название фундаментального шума и определяются, главным образом, отношением сигнал-шум, а также добротностью исследуемого перехода рабочих атомов [1-2]. Подавление такого шума связано с увеличением количества рабочих атомов, что, в свою очередь, может приводить к существенному спин-обменному взаимодействию. Стоит отметить, что в случае атомов рубидия оптимальное значение рабочей плотности атомов может превосходить на порядок плотность атомов цезия [3-6].

Однако, помимо указанного фундаментального шума, в любых стандартах на охлажденных атомах существуют еще и технические шумы, обусловленные как шумами лазерной и детектирующей систем, так и шумами син-

---

*Альманах современной метрологии, 2017, № 10*

тезатора, возникающими при формировании сигнала, зондирующего часовой атомный переход [7-8]. Часто технические шумы превышают фундаментальный шум, и в таком случае предельно достижимая стабильность стандарта определяется в большей степени именно уровнем этого типа шума. Как показывает опыт эксплуатации метрологического цезиевого репера частоты в России, а также результаты метрологических исследований ряда лабораторий мира, вклад шума синтезатора, формирующего частоту часового перехода, в общую нестабильность стандарта времени и частоты, работающего в импульсном (циклическом) режиме, а именно этот режим реализуется в случае работы «фонтана» [9], как правило, оказывается доминирующим. Таким образом, ввиду важности указанного вклада, возникает задача последовательного рассмотрения процесса взаимодействия зондирующего сигнала с квантовой системой стандарта частоты.

В литературе известно два основополагающих равноценных метода рассмотрения указанной проблемы. В первом случае используется радиотехническая модель модуляционно-демодуляционной схемы обратной связи, на основе которой определяется чувствительность детектируемого сигнала ошибки к частотным флуктуациям локального осциллятора (ЛО), определяющих метрологические характеристики зондирующего сигнала [10-15]. Во втором случае используется квантово-механическая модель описания атомной системы, взаимодействующей с классическим резонансным излучением. На основе этой модели также определяется функция чувствительности атомной системы к частотным флуктуациям внешнего резонансного поля [16-18].

Несмотря на внушительный объем произведенных исследований в области данной проблематики, стоит отметить, что важный на практике случай взаимодействия облака атомов с синусоидальным законом распределения по оси пролета резонансного поля в стандарте фонтанного типа освещен не достаточно подробно. Кроме того, поскольку прямая измеряемая метрологическая характеристика ЛО является спектральная плотность мощности фазового шума, то рассмотрение функции чувствительности атомной системы к фазовым флуктуациям излучения является наиболее оправданным и обоснованным. Далее будет детально рассмотрен вопрос о такой функции чувствительности и вычислении на ее основе деградации стабильности фонтана из-за влияния фазовых шумов ЛО.

#### **Чувствительность двухуровневой системы**

При взаимодействии с опросным сигналом (внешним полем СВЧ резонатора) атомную систему, которая в дальнейшем будет считаться двухуровневой, удобно описывать вектором псевдоспина  $\vec{R} = \{u, v, w\}$ , у которого координаты  $u$  и  $v$  отвечают за наведенную поляризацию, а  $w$  описывает раз-

ницу населенностей между основным и возбужденным состояниями с частотой перехода  $\omega_0$ .

В случае излучения магнитной компоненты поля СВЧ резонатора в виде идеальной монохроматической волны  $\vec{B}(\vec{r}_0, t) = \vec{b}B_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$  укороченные оптические уравнения Блоха имеют наиболее простой вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = (\omega - \omega_0) v, \\ \dot{v} = -(\omega - \omega_0) u + \Omega_R w, \\ \dot{w} = -\Omega_R v, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\Omega_R \sim \frac{\mu B_0}{\hbar}$  – частота Раби. Полученная система уравнений может быть переписана в компактном виде:

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{\Omega}_R \times \vec{R}(t), \quad (2)$$

где  $\vec{\Omega}_R = \{-\Omega_R, 0, -(\omega - \omega_0)\}$ .

В случае опросного сигнала, запрашивающего СВЧ резонатор в виде классического гармонического возбуждения с произвольной флуктуацией фазы  $\Delta\varphi$  и амплитуды  $\Delta B$  –  $\vec{B}(\vec{r}_0, t) = \vec{b}(B_0 + \Delta B) \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi)$ , оптические уравнения Блоха принимают следующий окончательный вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = -\Delta\varphi \cdot \Omega_R(t) w + (\omega - \omega_0) v, \\ \dot{v} = -(\omega - \omega_0) u + (1 + \Delta B) \cdot \Omega_R(t) w, \\ \dot{w} = -(1 + \Delta B) \cdot \Omega_R(t) v + \Delta\varphi \cdot \Omega_R(t) u. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь предполагается, что резонатор обладает аксиальной симметрией и частота Раби изменяется во времени по закону  $\Omega_R(t) \sim \sin \frac{\pi t}{\tau}$ ,  $\tau$  – время взаимодействия опросного сигнала с квантовой системой; такое предположение справедливо для резонатора, используемого в фонтане. В компактном виде система записывается как:

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{\Omega}_R(t) \times \vec{R}(t), \quad (4)$$

где  $\vec{\Omega}_R(t) = \{-(1 + \Delta B) \cdot \Omega_R(t), -\Delta\varphi \cdot \Omega_R(t), -(\omega - \omega_0)\}$ . Важно отметить для

дальнейшей геометрической интерпретации двух методов опроса, рассмотренных ниже, что флуктуации амплитуды связаны с поворотом вектора псевдоспина относительно оси  $u$ , а флуктуации фазы – относительно оси  $v$ .

Полученные уравнения (3) – (4) описывают процесс взаимодействия между атомной системой и СВЧ сигналом с произвольной флуктуацией фазы и амплитуды, что имеет место в режиме реальной работы квантового стандарта частоты.

Рассмотрим далее два важных случая (рис. 1) процесса опроса атомной системы, описывающих работу большинства квантовых стандартов: один  $\pi$ -импульс (метод Раби) и два  $\pi/2$ -импульса (метод Рэмси) [19]. В первом случае квантовая система возбуждается одиночным импульсом, который переводит систему из одного равновесного когерентного состояния в другое, при этом из геометрических соображений видно, что фазовый и амплитудный шум сигнала опроса вызывают одинаковое возмущение населенности конечного состояния. Во втором случае атомная система сначала находится в основном состоянии и взаимодействует с  $\pi/2$ -импульсом (I), затем фаза сигнала опроса сдвигается на  $\pi/2$  (II), и далее снова действует  $\pi/2$ -импульс (III), оставляя систему в равновесном состоянии. В такой конфигурации схемы опроса из геометрического представления видно, что амплитудный шум не влияет на равновесное состояние системы. Отметим, что второй метод возбуждения квантовой системы используется в стандартах частоты фонтанного типа.

Для определения влияния флуктуации фазы  $\Delta\varphi$  опросного сигнала на возмущение конечной вероятности  $\delta p$  перехода атомной системы из основного состояния в возбужденное введем функцию чувствительности  $g(t)$  следующим образом:

$$\delta p = \int_0^{\tau} g(t)\Delta\varphi(t) dt \quad (5)$$

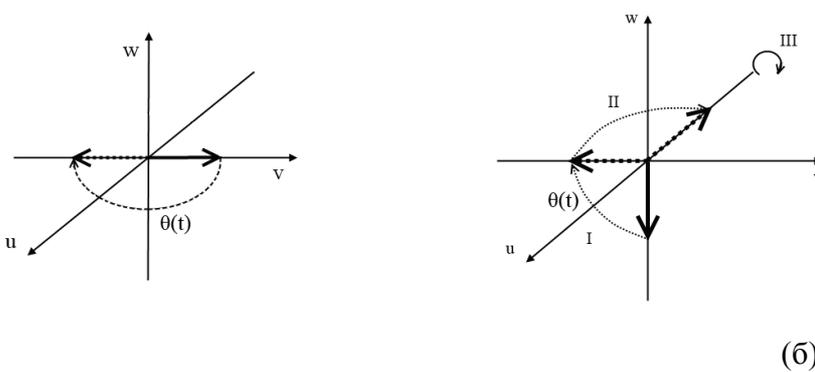


Рис. 1. Процесс взаимодействия опросного сигнала с атомной системой в методах Раби (а) и Рэмси (б)

Физический смысл введенной функции  $g(t)$  – малое изменение конечной вероятности перехода, вызванное единичным фазовым скачком, за единицу времени в момент  $t$ . Из геометрических соображений можно определить систему уравнений для нахождения аналитического вида этой функции:

$$\begin{cases} w(t) = -\cos[\Theta(t)], \\ v(t) = -\sin[\Theta(t)], \\ \dot{u} = -\Delta\varphi(t)\Omega_R(t)w(t), \\ \Omega_R(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt}. \end{cases} \quad (6)$$

Полученная система уравнений справедлива для метода Рэмси. Аналогичную систему можно получить для метода Раби. Аналитическое выражение  $g(t)$ , учитывая  $\delta p = \Delta u / 2$ , для двух методов имеет вид:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{2\tau} \sin \frac{\pi t}{\tau} \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi t}{\tau} \right) \right], (0 \leq t \leq \tau) - \text{метод Раби,} \\ g(t) &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4\tau} \sin \frac{\pi t}{\tau} \cos \left[ \frac{\pi}{4} \left( 1 - \cos \frac{\pi t}{\tau} \right) \right], (0 \leq t \leq \tau) - \text{метод Рэмси.} \end{aligned} \quad (7)$$

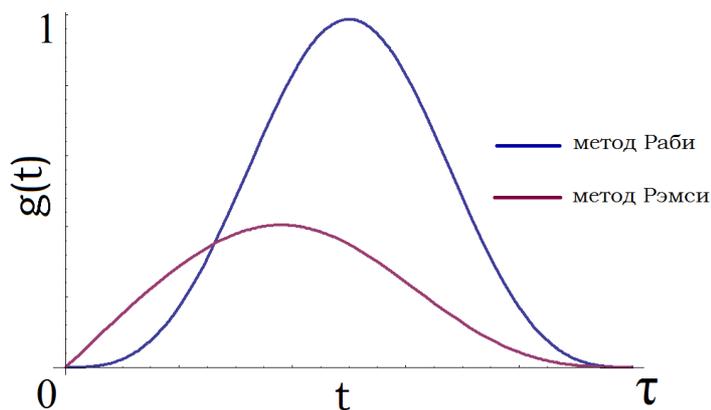


Рис. 2. Общий вид функции чувствительности для двух процессов опроса атомной системы. При отсутствии взаимодействия функция обращается в ноль

На рис. 2 приведен общий вид  $g(t)$  для двух методов возбуждения. Для подтверждения полученных результатов был проведен независимый эксперимент, в котором численными методами решалась система блоховских уравнений (3). Поскольку больший интерес представляет случай Рэмси, на рис. 3 приведено сравнение функции чувствительности, построенной для

этого случая в аналитическом виде и из результата численного эксперимента.

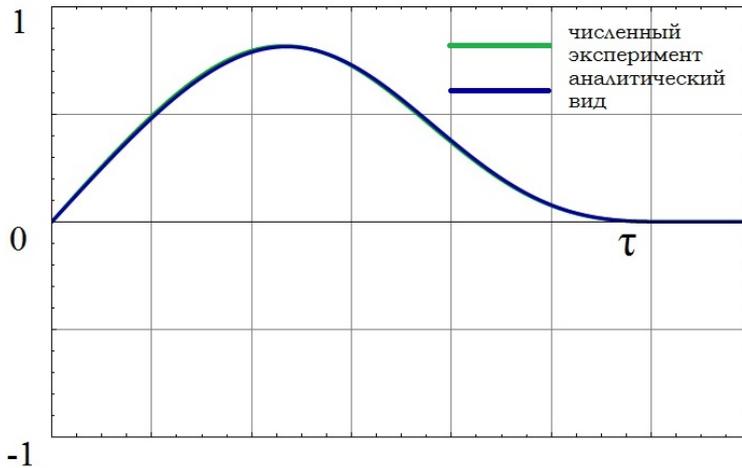


Рис. 3. Сравнение функции чувствительности, построенной аналитически и из численного эксперимента в области  $(0, 1.2\tau)$ . Кривые полностью совпадают в пределах толщины линии

Таким образом, показано, что в случае метода Раби фазовый и амплитудный шум опросного сигнала вносят одинаковое возмущение в конечную вероятность перехода двухуровневой системы, а в случае Рэмси амплитудный шум не оказывает на нее никакого влияния. Также найден вид функции чувствительности атомной системы к фазовым флуктуациям СВЧ сигнала, запитывающего резонатор в двух методах возбуждения. Наиболее важным из них является случай Рэмси, поскольку по этой схеме реализована работа опроса атомов в фонтане, которая подробно будет описана в следующем разделе.

### **Влияние ФШ опросного сигнала на стабильность стандарта частоты фонтанного типа**

В предыдущем разделе был исследован вопрос о чувствительности атомной системы к фазовым флуктуациям опросного сигнала в методе Рэмси. Продемонстрируем, как эта характеристика используется при описании работы цикла фонтана. Как и в любом квантовом стандарте частоты, при опросе атомной системы используется локальный осциллятор, который определяет ФШ опросного сигнала. В результате опроса квантовой системы формируется сигнал ошибки, который «локирует» (привязывает) частоту локального осциллятора к частоте атомного перехода. Таким образом, метрологические характеристики локированного осциллятора определяются

флуктуациями населенностей состояний рабочих атомов. На рис. 4 показан общий вид схемы на основе блоков формирования сигнала ошибки.

Разберем поэтапно работу представленной схемы. Исходно имеется частотный или фазовый шум, описываемый СПМ ФШ  $S_{\phi}(f)$  локального осциллятора, работающего в свободном режиме. Определим преобразования Фурье для произвольного непрерывного сигнала  $u(t)$  как:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (8)$$

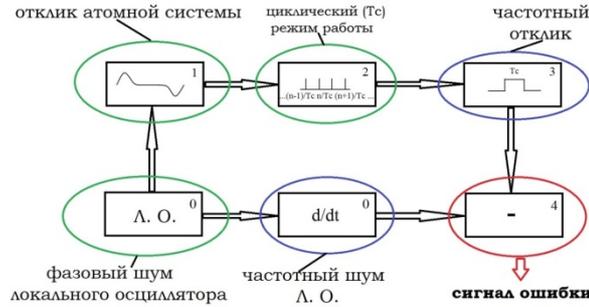


Рис. 4. Общий вид схемы формирования сигнала ошибки (поправки) в стандарте частоты фонтанного типа

Согласно определению функции чувствительности (5) отклик атомной системы на фазовый шум локального осциллятора есть с точностью до знака свертка этой функции с флуктуацией фазы ЛО  $\delta\phi_{LO}(t)$ . Таким образом, отклик квантовой системы  $\delta\phi_1$ , связанный с флуктуацией вероятности перехода системы соотношением  $\delta p = \frac{1}{2} \cdot \sin(\delta\phi_1) \approx \delta\phi_1/2$ , представляет собой отклик фильтра с временной характеристикой  $g_n(t) = 2g(t)$  с точки зрения радиотехнического подхода:

$$\delta\phi_1 = \int_0^{T+2\tau} g_n(t) \delta\phi_{LO}(t) dt, \quad (9)$$

где  $T$  – время между взаимодействиями облака атомов с резонатором. Из уравнения (9) можно показать, что справедливо следующее полезное соотношение для двусторонней СПМ  $\delta\phi_1$ :

$$S_{\delta\phi_1}^{2-side}(\omega) = \frac{|\delta\phi_{LO}(\omega)|^2 |g_n(\omega)|^2}{2\pi}. \quad (10)$$

На рис. 2–3 приведена функция чувствительности только при пролете вверх облака атомов через резонатор, при пролете вниз эта функция меняет знак. Таким образом, на всем времени цикла  $T_c$  порядка 1.5 с  $g(t)$  имеет ан-

тисимметричный вид (что схематично изображено на блоке 1). В этом случае свертка с указанной функцией представляет собой разность отклонения фазы ЛО между пролетом атомов вверх и вниз.

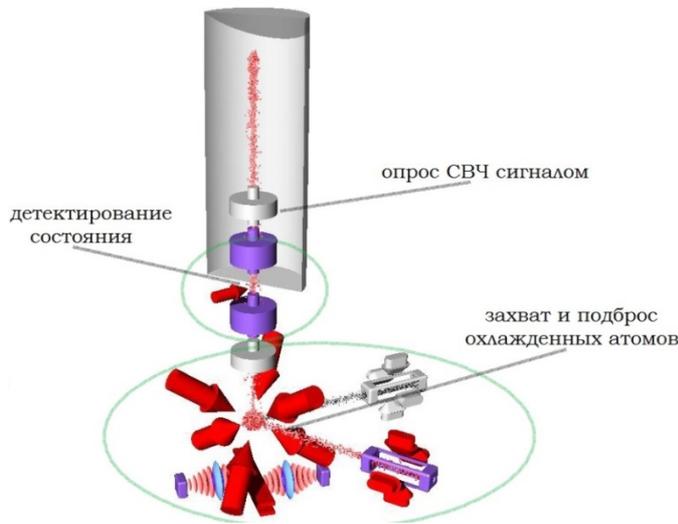


Рис. 5. Общая схема принципа циклической работы фонтана

Далее из-за цикличности работы фонтана (захват и подброс атомов [20-23], опрос СВЧ сигналом, детектирование состояния атомной системы – (рис. 5) разность отклонения фазы ЛО между пролетами вверх и вниз регистрируется дискретно во времени через каждый период цикла  $T_c$  (блок 2). Обозначая флуктуацию этой величины в случае циклического режима как  $\delta\phi_2$ , математическое выражение  $\delta\phi_2$  через  $\delta\phi_1$  в случае непрерывной работы фонтана имеет следующий вид:

$$\delta\phi_2(t) = \delta\phi_1(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c). \quad (11)$$

Здесь  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака. Переходя в частотное представление и учитывая следующие выражения:

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-ionT_c} \quad \text{– Фурье представление,} \quad (12)$$

$$\delta\phi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\phi_1(\omega') \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega-\omega')nT_c} d\omega' \quad \text{– теорема о свертке.} \quad (13)$$

Выражение для  $\delta\phi_2$  имеет вид:

$$\delta\phi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\phi_1(\omega') e^{i(\omega'-\omega)nT_c} d\omega'. \quad (14)$$

Используя равенство, справедливое для финитных функций:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{inx} f(x) dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(2\pi k), \quad (15)$$

величина  $\delta\phi_2$  принимает следующий окончательный вид:

$$\delta\phi_2(\omega) = \frac{1}{T_c} \sum_k \delta\phi_1\left(\omega + \frac{2\pi}{T_c} k\right). \quad (16)$$

Далее измеренное значение флуктуации ухода частоты ЛО между двумя пролетами остается постоянной величиной в течение всего цикла работы фонтана  $T_c$  (блок 3). Усредняя  $\delta\phi_2$  на интервале измерения  $T_m$  и обозначая измеренную флуктуацию ухода частоты как  $\delta f_m$ , имеем:

$$\delta f_m(t) = \delta\phi_2(t) \otimes h(t), \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} 1, & |t| < T_m \\ 0, & |t| > T_m \end{cases}. \quad (17)$$

Здесь символ  $\otimes$  означает свертку,  $h(t)$  – временная функция линейного фильтра. Запишем (17) в частотном представлении:

$$\delta f_m(\omega) = \frac{1}{\pi} \delta\phi_2(\omega) \cdot \frac{\sin(\omega T_m / 2)}{\omega}. \quad (18)$$

Учитывая выражения (10) и (16), окончательное выражение для измеренной флуктуации ухода частоты ЛО за один рабочий цикл имеет следующий вид:

$$\delta f_m(\omega) = \frac{1}{\pi T_c} \sum_k g_n^*\left(\omega + \frac{2\pi}{T_c} k\right) \delta\phi_{LO}\left(\omega + \frac{2\pi}{T_c} k\right) \cdot \frac{\sin(\omega T_m / 2)}{\omega}. \quad (19)$$

Измеряемая величина  $\delta f_m$  представляет интерес в низкочастотной области, поскольку  $\delta f_m(t)$  по своему определению есть постоянный сигнал, который должен компенсировать уход частоты ЛО за время цикла, то есть является сигналом ошибки. Обозначим флуктуацию истинного ухода частоты

ЛО как  $\delta f_{LO}$ , тогда, учитывая соотношение  $\delta f_{LO}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\delta\phi_{LO}(t)}{dt}$ ,

здесь символ \* означает комплексное сопряжение.

$$\mathcal{F}\{\delta f_{LO}(t)\} = \frac{i\omega}{2\pi} \delta\phi_{LO}(\omega). \quad (20)$$

Обозначая флуктуацию частоты локированного ЛО (ЛЛО) как  $\delta f_{LLO}$ , приведем известное выражение для замкнутой петли обратной связи во временной области:

$$\delta f_{LLO}(t) = \delta f_{LO}(t) - \delta f_m(t). \quad (21)$$

Рассмотрим постоянную составляющую уравнения (21) в частотной области:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \delta f_{LLO}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{i\omega}{2\pi} \delta\phi_{LO}(\omega) - \frac{1}{\pi T_c} \sum_k g_n^*(\omega + \frac{2\pi}{T_c} k) \delta\phi_{LO}(\omega + \frac{2\pi}{T_c} k) \cdot \frac{\sin(\omega T_m / 2)}{\omega} \right\}. \quad (22)$$

Упростим и запишем уравнение (22), разделяя сигнал ошибки на постоянную и частотную составляющие:

$$\delta f_{LLO}(0) = \frac{i\omega}{2\pi} \delta\phi_{LO}(0) - \frac{T_m}{2\pi T_c} g_n^*(\omega) \delta\phi_{LO}(0) - \frac{T_m}{2\pi T_c} \sum_{k \neq 0} g_n^*(\frac{2\pi}{T_c} k) \delta\phi_{LO}(\frac{2\pi}{T_c} k). \quad (23)$$

Как было отмечено, сигнал ошибки должен компенсировать уход частоты ЛО. Выделив в сигнале ошибки постоянную составляющую, получаем выражение для  $T_m$ :

$$\frac{i\omega}{2\pi} \delta\phi_{LO}(0) - \frac{T_m}{2\pi T_c} g_n^*(\omega) \delta\phi_{LO}(0) = 0 \Rightarrow T_m = \frac{T_c}{\int_0^{T+2\tau} g_n(t) t dt}. \quad (24)$$

Таким образом, учитывая (24), уравнение замкнутой петли принимает вид:

$$|\delta f_{LLO}(0)| = \frac{1}{2\pi} \frac{\sum_{k \neq 0} g_n^*(\frac{2\pi}{T_c} k) \delta\phi_{LO}(\frac{2\pi}{T_c} k)}{\int_0^{T+2\tau} g_n(t) t dt}. \quad (25)$$

Как видно из выражения (25), флуктуации частоты локированного ЛО  $\delta f_{LLO}$ , в общем случае, не равны нулю и ограничены не скомпенсированным вкладом от сигнала ошибки. Таким образом, на частотах кратных  $1/T_c$  в сигнале ошибки присутствуют паразитные гармоники, связанные с эффектом переноса спектра ФШ ЛО в низкочастотную область («aliasing»). Таким образом, описанный процесс измерения частоты в импульсном стандарте времени и частоты показывает возникновение «алиасинга» ФШ ЛО в сигнале обратной связи. Впервые этот эффект был предсказан Джоном Диком и

назван в его честь. В литературе, как правило, уделяется особенное внимание Дик эффекту при описании стандартов частоты, работающих в импульсном режиме [10-18, 24-25].

Вернемся к выражению (25), из которого следует, что постоянная составляющая флуктуаций частоты локированного ЛО  $\delta f_{LLO}(0)$  определяется спектральной характеристикой  $\delta\phi_{LO}$  и функцией чувствительности  $g_n(t)$ , подробно изученной в предыдущем разделе. На рис. 6 приведен спектр такой функции для случая режима работы фонтана, при котором характерные времена равны:  $T_c \approx 1.5$  с,  $\tau \approx 14$  мс. Рассматривая  $g_n(t)$  как линейный фильтр и определяя полосу пропускания на уровне  $1/2$  от максимума пропускания, отметим, что приведенный фильтр (рис. 6) имеет полосу около 60 Гц.

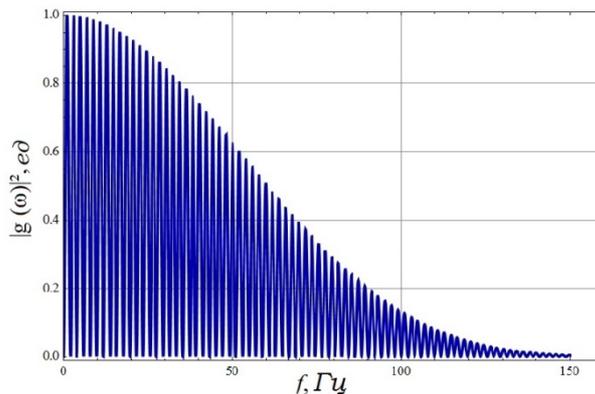


Рис. 6. Спектр функции чувствительности  $g(t)$

Перейдем к описанию СКДО или девиации Алана частоты стандарта фонтанного типа и покажем, как паразитные гармоники ФШ ЛО, присутствующие в сигнале ошибки, приводят к деградации стабильности стандарта. Положим, что флуктуации частоты  $\delta f_{LLO}$  имеют характер белого частотного шума, что находит место в квантовых стандартах частоты. Для определенности, белый частотный шум ограничен полосой пропускания  $f_c$  низкочастотного фильтра, находящегося в петле обратной связи:

$$\delta f_{LLO}(f) = \delta f_{LLO}(0) \quad (26)$$

$$f < f_c.$$

Тогда выражение для односторонней СПМ  $\delta f_{LLO}$ , учитывая (25)–(26), имеет следующий вид:

$$S_{\delta f}^{LLO}(f) \equiv S_{\delta f}^{LLO}(0) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\sum_{k>0} \left| g_n \left( \frac{2\pi}{T_c} k \right) \right|^2 S_{\delta\phi}^{LO} \left( \frac{k}{T_c} \right)}{\left[ \int_0^{T+2\tau} g_n(t) t dt \right]^2}. \quad (27)$$

Выражение (27) в общем виде принято называть формулой Дика. В данном случае СПМ  $\delta f_{LLO}$  выражается через функцию чувствительности, определенную из законов квантовой механики, и одностороннюю СПМ ФШ ЛО  $S_{\delta\phi}^{LO}$ . Учитывая характер белого шума флуктуаций частоты ЛЛО, запишем известное выражение для девиации Алана  $\sigma_y$  частоты квантового стандарта:

$$\sigma_y^2(\tau_m) \equiv \sigma_{LO}^2 = \frac{1}{2\tau_m} \frac{S_{\delta f}^{LLO}(0)}{\nu_0^2}, \quad (28)$$

здесь  $\tau_m$  – время измерения. Таким образом, выражения (27–28) показывают, как СПМ ФШ ЛО ограничивает предельно достигаемую стабильность стандарта частоты, работающего в импульсном режиме. Для случая характерных времен  $T_c \approx 1.5$  с,  $\tau \approx 14$  мс, используемых во всех дальнейших вычислениях, определяющий вклад в нестабильность стандарта фонтанного типа, вносят гармоники ФШ ЛО на частотах, кратных  $f_c = 0.7$  Гц в полосе пропускания  $\Delta = 60$  Гц. Также следует отметить, что, во-первых, паразитные гармоники около 1 кГц и выше имеют пренебрежимо малый вклад в общую сумму, и, во-вторых, выражение (27) справедливо для произвольного вида ФШ ЛО. В случае белого фазового шума ЛО  $S_{\delta\phi}^{LO}(f) = S_{\delta\phi}(0)$ , имеющего место, например, в водородном мазере в широкой спектральной полосе анализа, выражение для девиации Аллана стандарта принимает следующий вид:

$$\sigma_y^2(\tau_m) = \frac{T_c}{2\tau_m} S_{\delta\phi}(0) \int_0^{\tau} g_n^2(t) dt. \quad (29)$$

Таким образом, используя результаты предыдущего и настоящего раздела, можно произвести численный эксперимент расчета девиации Аллана стандарта частоты фонтанного типа для определенного ЛО с заданной в полосе до 1 кГц СПМ ФШ. Результат такого расчета отображает вклад в общую нестабильность фонтана, вызванный ФШ ЛО, при этом под ФШ ЛО будем понимать ФШ синтезатора или ФШ опросного/зондирующего сигнала в зависимости от контекста задачи.

### Результаты численного эксперимента для двух моделей опросного сигнала

Проблему ограничения стабильности «фонтана» из-за фазового шума опросного сигнала можно разрешить с помощью применения водородного генератора повышенной мощности. При этом СПМ ФШ опросного сигнала, формируемого из синтезатора, на который подается опорный сигнал водородного генератора, определяется характеристиками этих двух приборов. Кроме того, будем считать известным выражение СПМ ФШ для указанных приборов.

Рассмотрим в качестве первой и эталонной модели СВЧ синтезатора коммерческий прибор Rb-1 фирмы Spectra Dynamics Incorporation, метрологические характеристики которого задаются сверхмалошумящим кварцевым генератором. Данный прибор является полным аналогом используемого синтезатора в метрологическом цезиевом репере частоты и представляет оптимальный выбор в своем классе среди многих коммерческих аналогов. В такой модели СВЧ синтезатора уровень СПМ ФШ опросного сигнала определяется упомянутым кварцевым генератором, ФШ которого описывается типичной СПМ для лучших образцов кварца:  $S_{\varphi}(f)$  [дБРад<sup>2</sup>/Гц] =  $-135.5/f - 132.0/f^3$  на несущей частоте 5 МГц при отстройках менее 1 кГц. Кроме того, будем считать, что водородный генератор, входящий в состав общей схемы «фонтана», выполняет функцию опоры для синтезатора и не обладает сигналом повышенной мощности ( $S/N < 70$  дБ). Таким образом, в описываемой модели характеристики водородного генератора, а также других элементов в схеме синтеза, не влияют на ФШ формируемого опросного сигнала в полосе от  $f_c = 0.7$  Гц до  $f_b = 1$  кГц. На рис. 7 приведен результат расчета эффекта Дика синтезатора SDI Rb-1 в рамках описанной модели, равный  $\sigma_{LO} = 8.5 \cdot 10^{-14} / \sqrt{\tau}$ . Полученный результат соответствует времени усреднения «фонтана» порядка  $8\frac{1}{2}$  суток для достижения СКДО частоты уровня  $1 \cdot 10^{-16}$ , что удовлетворяет метрологическому требованию  $\sigma_{LO} < 1.5 \cdot 10^{-13} / \sqrt{\tau}$ , предъявляемому к узлу формирования зондирующего сигнала.

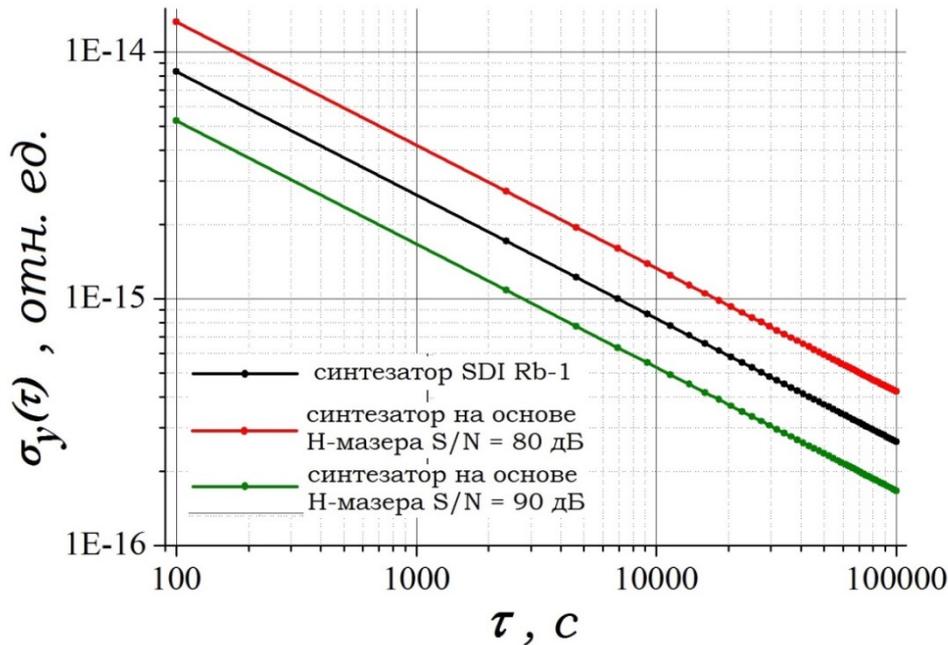


Рис. 10. Рассчитанная нестабильность рубидиевого фонтана, вызванная фазовыми шумами синтезатора различных типов

Перейдем к рассмотрению второй модели СВЧ синтезатора, основанного на использовании сигналов водородного генератора повышенной мощности ( $S/N \geq 80$  дБ) и лейкосапфирового СВЧ генератора промежуточной частоты (ПЧ) 7 ГГц. В данной модели СПМ ФШ опорного сигнала определяется ФШ как водородного генератора, так и генератора ПЧ 7 ГГц. В качестве параметров, определяющих ФШ диэлектрического генератора 7 ГГц, в рассматриваемой модели выбрано значение нагруженной добротности резонатора  $Q = 2.5 \cdot 10^5$ , что обеспечивается кристаллом лейкосапфира при комнатной температуре, и значение результирующего фликер-шума основного усилителя в цепи обратной связи  $b_{-1}/f = -140.0/f$  [дБрад<sup>2</sup>/Гц], обеспечивающееся сверхмалозумящим усилителем на основе кремне-германиевых (*SiGe*) биполярных транзисторов при использовании интерферометрической схемы для дополнительного подавления мультипликативного шума вблизи несущей. Также как и в предыдущей модели, будем считать, что остальные элементы схемы синтеза не влияют на ФШ зондирующего сигнала. На рис. 7 отображены результаты расчета описанного СВЧ синтезатора для двух значений сигнал-шум  $S/N$  водородного генератора, являющегося ключевым и основополагающим параметром в рамках рассматриваемой модели. Результат расчета эффекта Дика для случая  $S/N = 80$  дБ составляет

$\sigma_{LO} = 1.4 \cdot 10^{-13} / \sqrt{\tau}$ , что соответствует времени усреднения около  $22\frac{1}{2}$  суток. Для случая  $S/N = 90$  дБ расчетное значение эффекта Дика составляет  $\sigma_{LO} = 5.3 \cdot 10^{-14} / \sqrt{\tau}$  и соответствует времени усреднения порядка  $3\frac{1}{2}$  суток.

Таким образом, получены результаты расчета эффекта Дика для двух принципиально различных моделей СВЧ синтезатора. Первая модель соответствует полностью коммерческому прибору, вторая модель соответствует разработанной и исследованной во ФГУП «ВНИИФТРИ» схеме формирования опросного сигнала (далее – исследуемому синтезатору). Обе модели рассмотрены для приборов с теоретически предельно достигаемыми метрологическими характеристиками в настоящий момент.

Представленные результаты расчета приводят к выводу о том, что обе схемы удовлетворяют требованию, предъявляемому к опросному сигналу, т.е. решают обозначенную в работе проблему. Далее, исследуемый синтезатор на основе Н-мазера за счет увеличения его выходной мощности превосходит по своим характеристикам синтезатор SDI Rb-1. Также важно отметить, что согласно приведенным результатам расчета и метрологическому требованию для опросного сигнала минимальный уровень выходной мощности Н-мазера в исследуемом синтезаторе должен быть не менее 80 дБ.

### **Выводы**

Проведено теоретическое исследование взаимодействия между двухуровневой квантовой системой и резонансным излучением, являющегося ключевым узлом в работе стандарта частоты фонтанного типа. В результате получен оригинальный вид функции чувствительности атомной системы к фазовым флуктуациям опросного сигнала как аналитически, так и из численного эксперимента, для двух схем опроса. Используя полученное выражение для указанной функции, а также аналитическое описание работы цикла стандарта частоты фонтанного типа, найдено математическое выражение для расчета эффекта Дика или нестабильности фонтана, вызванной ФШ СВЧ синтезатора.

Далее на основе результатов численного эксперимента произведено сравнение двух принципиально различных моделей СВЧ синтезатора. Показано, что обе схемы решают обозначенную в работе проблему. Непосредственно рассчитан вклад в нестабильность фонтана, вызванный фазовым шумом коммерческого синтезатора SDI Rb-1 и исследуемого синтезатора на основе мощного Н-мазера в рамках рассмотренных моделей этих систем. Во-первых, показано, что в случае увеличения отношения  $S/N$  Н-мазера до 90 дБ исследуемый синтезатор превосходит коммерческий синтезатор по величине эффекта Дика в 1.6 раза. Во-вторых, показано, что уровень отношения  $S/N$  должен быть не менее 80 дБ для выполнения метрологического требования  $\sigma_{LO} < 1.5 \cdot 10^{-13} / \sqrt{\tau}$ , предъявляемого к опросному сигналу.

*Альманах современной метрологии, 2017, № 10*

---

**Литература**

1. Itano W.M., Bergquist J.C., Bollinger J.J., Gilligan J.M., Heinzen D.J., Moore F.L., Raizen M.G. and Wineland D.J. Quantum projection noise: Population fluctuations in two-level systems // *Phys. Rev. A*, v. 47, N. 5, pp. 3554-3570, 1993.
2. Santarelli G., Laurent Ph., Lemonde P., Clairon A., Mann A.G., Chang S., Luiten A.N. and Salomon Ch. Quantum projection noise in an atomic fountain: A high stability caesium frequency standard // *Phys. Rev. Lett.*, 82: 4619-4622, 1999.
3. Gibble K. and Chu S. Laser-cooled Cs frequency standard and a measurement of the frequency shift due to ultracold collisions // *Phys. Rev. Lett.*, 70:1771-1774, 1983.
4. Fertig Ch. and Gibble K. Measurement and cancellation of the cold collision frequency shift in an  $^{87}\text{Rb}$  fountain clock // *Phys. Rev. Lett.*, 85:1622-1625, 2000.
5. Bize. S., Sortais Y., Santos M.S., Mandache C., Clairon A. and Salomon S. High-accuracy measurement of the  $^{87}\text{Rb}$  ground-state hyperfine splitting in an atomic fountain // *Europhys. Lett.*, 45:558-564, 1999.
6. Bureau International des Poids et Mesures. SI Brochure: The International System of Units (SI) // 8<sup>th</sup> edition updated in 2014, Appendix 2, Practical realization of the definitions of some important units, Recommended values of standard frequencies, 2006.
7. Kramer G. Noise in passive frequency standards // *Proceedings of the CP-EM*, pp. 157-159, 1974.
8. Audoin C., Candelier V. and Dimarcq N. A limit to the frequency stability of passive frequency standards due to an intermodulation effect // *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 40, pp. 121-125, 1991.
9. Joyet A., Mileti G., Thomann P. and Dudle G. Continuous fountain Cs standard: stability and accuracy issues // *Frequency Standards and Metrology, Proceedings of the 6<sup>th</sup> Symposium*, pp. 273-280, 2002.
10. Greenhall C.A. and Dick G.J. Local oscillator limited frequency stability for passive atomic frequency standards using square wave frequency modulation // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. And Freq. Contr.*, 47:1593-1600, 2000.
11. Makdissi A., de Clercq E., Audoin C. and Clairon A. Generalization of the Dick effect to continuous beam frequency standards // *Proceedings IFCS*, pp. 263-269, 1998.
12. Joyet A., Mileti G., Dudle G. and P. Thomann. Theoretical study of the Dick effect in a continuously operated Ramsey resonator // *IEEE Trans. Instrum. Measur.*, v. 50, N. 1, pp. 150-156, 2001.

13. Greenhall C.A. A derivation of the long-term degradation of a pulsed atomic frequency standard from a control-loop model // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect. And Freq. Contr., v. 45, N. 4, pp. 895-898, 1998.
14. Presti L. Lo., Rovera D. and Marchi A. De. A simple analysis of the Dick effect in terms of phase noise spectral densities // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect. And Freq. Contr., v. 45, N. 4, pp. 899-905, 1998.
15. Walls F.L. Errors in determining the center of a resonance line using sinusoidal frequency (phase) modulation // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect. And Freq. Contr., v. 34, N. 6, pp. 592-597, 1987.
16. Dick G.J. Local oscillator induced instabilities in trapped ion frequency standards // Proceedings of the 19<sup>th</sup> PTTI, Redondo Beach, pp. 133-147, 1987.
17. Dick G.J., Prestage J.D., Greenhall C.A. and L. Maleki. Local oscillator induced degradation of medium-term stability in passive atomic frequency standards // Proceedings of the 22<sup>nd</sup> PTTI, Vienna, pp. 487-508, 1990.
18. Bize S., Sortais Y., Lemonde P., Zhang S., Laurent Ph., Santarelli G., Salomon C., Clairon A. Interrogation oscillator noise rejection in the comparison of atomic fountains // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect. And Freq. Contr., v. 47, N. 5, pp. 1253-1255, 2000.
19. Ramsey N.F. A molecular beam resonance method with separated oscillating fields // Phys. Rev., 78:695-699, 1950.
20. Домнин Ю.С., Ёлкин Г.А., Новосёлов А.В., Барышев В.Н., Копылов Л.Н., Малышев Ю.М., Пальчиков В.Г. Применение холодных атомов цезия в квантовых стандартах частоты // Квантовая электроника, В. 34, Н. 12, с. 1084-1095, 2004.
21. Wineland D.J. and Itano W.M. Laser cooling of atoms // Phys. Rev., A, 20:1521-1540, 1979.
22. Lett P.D., Phillips W.D., Rolston S.L., Tanner C.E., Watts R.N. and Westbrook C.I. Optical molasses // J. Opt. Soc. Am. B, 6:2084-2107, 1989.
23. Phillips W.D., Prodan J.V. and Metcalf H.J. Laser cooling and electromagnetic trapping of neutral atoms // J. Opt. Soc. Am. B, 2:1751-1767, 1985.
24. Santarelli G., Audoin C., Makdissi A., Laurent P., Dick G.J. and Clairon A. Frequency stability degradation of an oscillator slaved to a periodically interrogated atomic resonator // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect. And Freq. Contr., v. 45, pp. 887-894, 1998.
25. Audoin C., Santarelli G., Makdissi A. and Clairon A. Properties of an oscillator slaved to a periodically interrogated atomic resonator // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect. And Freq. Contr., v. 45, N. 4, pp. 877-886, 1998.