I. Фундаментальные исследования

УДК 528.223

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ КВАНТОВОГО НИВЕЛИРА И СЕТИ «КВАНТОВЫЙ ФУТШТОК»

В.Ф. Фатеев

ФГУП «ВНИИФТРИ», Менделеево, Московская обл.
fateev@vniiftri.ru

В статье развивается релятивистская теория квантового нивелира и сети «Квантовый футшток», принцип действия которых основан на измерении релятивистских эффектов замедления времени и гравитационного смещения частоты с помощью высокостабильных стандартов частоты и времени (СЧВ) с относительной нестабильностью не хуже 10^{-17}. Выведены формулы для определения ортометрических высот и их разностей с помощью квантовых нивелиров, использующих стационарные и мобильные СЧВ. Приведены релятивистские соотношения для систем синхронизации квантовых нивелиров на основе метода релятивистской синхронизации и волоконно-оптических линий связи. Рассмотрены погрешности измерений, вызванные лунно-солнечными приливами, неравномерностью вращения Земли и неоднородностью гравитационного поля Земли, относительная величина которых превышает 10^{-19}.

Ключевые слова: квантовый нивелир, релятивистские соотношения, ортометрические высоты, теория, метод, погрешности.

RELATIVISTIC THEORY AND APPLICATIONS OF THE QUANTUM LEVEL AND "QUANTUM FOOTSTOCK" NETWORK

V.F. Fateev

FSUE “VNIIFTRI”, Mendeleevo, Moscow region
fateev@vniiftri.ru

The article discusses the relativistic theory of the quantum level and the “Quantum footstock” network. The operation principle of the system is based on measuring the relativistic effects of time dilation and gravitaty frequency shift using highly stable atomic clock with a relative instability less than 10^{-17}. Expressions are obtained for determining orthometric heights and their differences using quantum levels based on stationary and mobile atomic clocks. Relativistic relations are presented for quantum levels synchronization systems based on the method of relativistic synchronization and fiber-optic communication lines. The errors of measurements caused by tides, irregularity rotation of the Earth and anomalies of the Earth's gravitational field, the relative value of which exceeds 10^{-19}, are considered.

Key words: quantum level, relativistic expressions, orthometric height, theory, method, errors.

Введение

Перспективные системы автономной навигации на основе измерения параметров гравитационного поля Земли (ГПЗ) требуют создания высокоточной высотной основы больших территорий для взаимной привязки навигационно-гравиметрических карт на разных участках маршрута движения. При этом создание гравитационно-навигационных карт основано на измерении различных характеристик ГПЗ вдоль маршрута движения средства навигации, в том числе профиля ускорения свободного падения, разности гравитационных потенциалов, уклонения отвесных линий (УОЛ) и др. [1].

Современные методы создания единой высотной основы больших территорий базируются на основе использования опорных поверхностей акваторий (например, Кронштадтский футшток в Балтийской системе высот, Охотский футшток и др.). Нормальные высоты в других разнесённых точках на поверхности Земли отсчитываются от этих поверхностей с помощью классических нивелиров, выполненных на основе современных высокоточных лазерных тахеометров и др. Вместе с тем классический подход к формированию высотной основы на основе лазерных нивелиров обладает большим недостатком: погрешность определения нормальных высот накапливается с увеличением расстояния от исходного футштока. Поэтому при требовании к погрешности определения разности высот глобально разнесённых точек в единицы–десятки сантиметров реальная погрешность в удалённых точках страны в настоящее время на 1–2 порядка выше.

В современной Глобальной системе геодезических наблюдений GGOS (*Global Geodetic Observing System*) [2] требования к погрешности в определении трёхмерных координат точек на поверхности Земли и глобальных расстояний более жёсткие и оцениваются величиной 1–2 миллиметра.

В 2015 году на Пражской конференции Международной ассоциации геодезии (IAG) была принята специальная резолюция «Об определении и реализации международной системы отсчёта высот (IHRS)» [3]. Согласно этой резолюции, за опорную поверхность при определении высоты следует принять эквипотенциальную поверхность геоида и высоту любой точки на Земле отсчитывать относительно неё. Эти высоты предлагается определять через эквивалентную разность гравитационных потенциалов $\Delta C_G = \varphi_G - \varphi_m$, которая называется геопотенциальным числом. Здесь $\varphi_G = 6{,}26368534 \cdot 10^7$ м^2/с^2 — гравитационный потенциал на поверхности геоида, который является величиной постоянной для любой широты и долготы; φ_m — потенциал в исследуемой точке, значение которого определяется пространственными координатами точки в Международной земной системе координат ITRF.

На основе этой резолюции с 2017 года в IAG создан специальный сервис IHRS, главной задачей которого является установление единой высокоточной глобальной системы высот. Кроме того, создана рабочая группа по стратегии реализации IHRF.

В новой системе определения высот измеряемой физической величиной является разность гравитационных потенциалов $\Delta\varphi$ между исследуемыми точками на поверхности Земли. Согласно общей теории относительности, физическими эффектами, непосредственно связанными с разностью гравитационных потенциалов, являются эффекты гравитационного смещения частоты Δf_{GR} и гравитационного замедления (смещения шкалы) времени $\Delta\tau_{GR}$. При этом для близко расположенных точек разность потенциалов приближённо определяется разностью их ортометрических высот ΔH_{ort} и средним для обеих точек значением ускорения свободного падения g [1, 4, 8], а относительные значения упомянутых гравитационных смещений, соответственно, на частоте f_0 и на интервале времени τ_0 определяются соотношением:

$$\frac{\Delta f_{GR}}{f_0} = \frac{\Delta\tau_{GR}}{\tau_0} = \frac{\Delta\varphi}{c^2} \approx \frac{g}{c^2}\Delta H_{ort}, \tag{1}$$

где c — скорость света.

Эти эффекты в настоящее время можно измерить с помощью высокостабильных стандартов частоты и времени (СЧВ) [4–8]. Исходя из требований программы GGOS по погрешности определения разности высот 1 мм, из этой формулы находим требования к относительной погрешности измерения частоты и времени, которая приблизительно составляет 10^{-19}. На эту цифру будем далее ориентироваться при оценке предельных значений учитываемых релятивистских эффектов.

Комплекс средств, необходимых для измерения геопотенциального числа и соответствующей разности ортометрических высот, включает два разнесённых СЧВ (пару взаимосвязанных атомных часов), а также систему измерения расхождения их шкал времени (синхронизации) или систему измерения разности частот. Такой комплекс можно назвать *квантовым нивелиром* [7–10]. По сравнению с классическим нивелиром его погрешность слабо зависит от расстояния между исследуемыми точками, и он в зависимости от возможностей системы синхронизации может выполнять глобальные измерения. Измерение гравитационных смещений времени и частоты может выполняться с использованием сигналов ГНСС типа ГЛОНАСС/GPS/Galileo/Beidou [8–10], с помощью волоконно-оптических линий связи (ВОЛС) [11], а также метода релятивистской синхронизации, основанного на компенсации релятивистских эффектов на маршруте движения транспортируемых часов [12]. Данное направление измерения разности высот в научной печати получило названия «релятивистская геодезия» и «хронометрическая геодезия» [13, 14].

На основе квантовых нивелиров можно создать распределённую сеть первоначального измерения ортометрических высот (геопотенциальных чисел) и последующего непрерывного мониторинга состояния системы высот между удалёнными точками Земли. Схема такой системы мониторинга (рис. 1) включает в себя Центральный СЧВ, а также региональные и мобильные СЧВ, связанные различными системами синхронизации. Центральный СЧВ с наивысшей стабильностью, который является хранителем эталонной частоты и эталонной шкалы времени, предлагается назвать «*Квантовый футшток*» по аналогии, например, с Кронштадтским футштоком в системе классических нивелиров [15], а сеть на его основе — *«Сеть Квантового футштока»*. Отсчёт ортометрических высот и их изменений ведётся относительно Квантового футштока с помощью сети квантовых нивелиров.

В качестве ведомых, или вторичных СЧВ квантовых нивелиров сети, могут выступать стационарные наземные СЧВ, мобильные наземные СЧВ (автомобильные, морские надводные и подводные), мобильные авиационные СЧВ, а также космические. В качестве высокоточных систем синхронизации квантовых нивелиров могут использоваться космические радиотехнические системы (дуплексные на основе геостационарные КА, а также системы синхронизации на основе сигналов ГНСС), космические системы на основе квантово-оптических систем, системы синхронизации на основе РСДБ (радиоинтерферометров со сверхдлинной базой), на основе транспортируемых (мобильных) атомных часов с использованием метода релятивистской синхронизации, а также оптические системы синхронизации на основе волоконно-оптических линий связи (ВОЛС).

Другим важным параметром ГПЗ при подготовке навигационно-гравиметрических карт является уклонение отвесных линий (УОЛ). Наиболее точным современным методом измерения УОЛ при подготовке карт на маршруте навигации является астрономо-геодезический способ, основанный на использовании современных цифровых малогабаритных зенитных телескопов [16, 17]. Точность измерения такого способа оценивается в доли угл. сек., а оперативность измерения — в десятки минут.

Вместе с тем астрономо-геодезический способ работоспособен только в ночное время, причём в условиях полного отсутствия облачности. В этой связи необходима разработка способа измерения УОЛ, свободного от перечисленных недостатков. Принципиальная возможность таких измерений открывается на основе высокоточного измерения разности гравитационных потенциалов и соответствующей разности ортометрических высот двух точек, разнесённых на известное расстояние. Такие измерения выполнимы с помощью различных типов квантовых нивелиров.

В целом для обеспечения высокой точности сети квантовых нивелиров, замыкающейся на «Квантовый футшток», а также расширения областей их практического применения необходимо более глубокое описание релятивистских явлений, лежащих в их основе, разработка новых способов измерения ортометрических высот, а также планирование новых релятивистских экспериментов с использованием высокостабильных СЧВ. Этому и посвящена данная работа.

1. Релятивистское определение частоты и времени для квантового нивелира на стационарных атомных часах

1.1. Исходные релятивистские соотношения

Рассмотрим пару наземных стационарных высокостабильных стандартов частоты и времени (СЧВ), составляющих основу квантового нивелира, и определим взаимные релятивистские расхождения их частоты и времени. Условимся, что опорный, или базовый стандарт частоты и времени СЧВ-1, находящийся в опорной точке квантового нивелира, является хранителем собственной частоты f_1 и шкалы собственного (измеряемого) времени τ_1. Второй, ведомый измерительный стандарт квантового нивелира СЧВ-2 размещается в другой точке на поверхности Земли и является хранителем собственной частоты и собственного бортового времени, соответственно f_2, τ_2. В качестве координатного времени используем геоцентрическое координатное время $t_{TCG} = t$.

Текущее положение неподвижных стандартов (или атомных часов) рассмотрим из геоцентрической невращающейся небесной системы отсчёта ICRS. Положение часов в этой системе характеризуется радиус-векторами $\vec{R}_1, \vec{R}_2$, а скорости перемещения — векторами $\vec{V}_1, \vec{V}_2$.

При этих условиях общие формулы для подлежащего измерению (*measurable*) релятивистского набега временной шкалы СЧВ-2 относительно шкалы базового СЧВ-1 $\Delta\tau_{rel}^{ms}$ и измеряемого релятивистского ухода частоты задающего генератора СЧВ-2 относительно СЧВ-1 Δf_{rel}^{ms} имеют вид [13]:

$$\Delta\tau_{rel}^{ms} = \left(\tau_2 - \tau_1\right)_{rel}^{ms} = \int_{\tau_{11}}^{\tau_{12}} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} - 1\right) d\tau_1 = \int_{\tau_{11}}^{\tau_{12}} \frac{\Delta f_{rel}}{f_1} d\tau_1; \quad \frac{\Delta f_{rel}^{ms}}{f_1} = \frac{\left(f_2 - f_1\right)_{rel}^{ms}}{f_1} = \frac{\theta_2}{\theta_1} - 1, \quad (2)$$

где τ_{11}, τ_{12} — моменты начала и окончания интервала интегрирования по шкале базовых часов τ_1; θ_1, θ_2 — коэффициенты преобразования шкал собственного времени базовых (1) и ведомых (2) часов относительно координатного времени t, которые в системе ICRS определяются соотношениями, соответственно [13]:

$$\theta_1 = 1 - \frac{\varphi_1}{c^2} - \frac{V_1^2}{2c^2}; \qquad \theta_2 = 1 - \frac{\varphi_2}{c^2} - \frac{V_2^2}{2c^2}, \quad (3)$$

где φ_1, φ_2 — гравитационные потенциалы в точках размещения СЧВ-1 и СЧВ-2; V_1, V_2 — скорости обоих СЧВ в системе ICRS за счёт вращения Земли; c — скорость света.

Входящие в эти формулы потенциалы и скорости атомных часов слабо изменяются во времени. Потенциалы имеют постоянную составляющую, а также медленно меняющиеся во времени приливные и неприливные составляющие. Кроме того, они изменяются вдоль поверхности Земли за счёт неоднородности её гравитационного поля. Скорости обоих наземных часов, кроме постоянной составляющей, имеют слабопеременную во времени составляющую за счёт неравномерности вращения Земли. Эти факторы вызывают дополнительные медленно меняющиеся релятивистские эффекты, которые при точных измерениях необходимо учитывать.

Для рассматриваемого наземного квантового нивелира на стационарных СЧВ справедливы следующие ограничения: измерительные СЧВ (атомные часы) располагаются на поверхности Земли с разностью высот не более нескольких километров, т.е. $\varphi_0 - \varphi_m \ll \varphi_0, \varphi_m$, а максимальная скорость их перемещения в выбранной системе отсчёта ICRS на экваторе не превышает 465 м/с. В результате релятивистскими эффектами, определяемыми произведениями вида $(\varphi_0\varphi_m / c^4)$, $(\varphi V^2 / c^4)$, в предыдущих формулах можно пренебречь, поскольку их относительная величина значительно меньше установленного выше значения 10^{-19}.

Выделяя искомое гравитационное смещение частоты в виде отдельного слагаемого, из формул (2–3) с учётом приведённых выше ограничений получаем:

$$\frac{\Delta f_{rel}^{ms}}{f_1} = \frac{\left(f_2 - f_1\right)_{rel}^{ms}}{f_1} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} + \frac{\delta f_{rel}^{cal}}{f_1}, \quad \delta f_{rel}^{cal} = \delta f_{\Omega}^{=} + \delta f_{\Omega}^{\approx} + \delta f_{\varphi}^{\approx} \tag{4}$$

где δf_{rel}^{cal} — вычисляемые по текущим координатам и скоростям атомных часов «помеховые» составляющие взаимных, или разностных, релятивистских частотных смещений двух часов, причём $\delta f_{\Omega}^{=} / f_1 = \left(V_1^{2=} - V_2^{2=}\right) / 2c^2$ — составляющая разности эффектов Доплера II порядка, вызванная постоянными составляющими скоростей СЧВ-1 и СЧВ-2 вследствие вращения Земли; $\delta f_{\Omega}^{\approx}$ — слабопеременная составляющая разностного частотного смещения из-за неравномерности вращения Земли; $\delta f_{\varphi}^{\approx}$ — слабопеременный взаимный гравитационный эффект смещения, вызванный лунно-солнечными приливами в точках размещения СЧВ-1 и СЧВ-2. Законы изменения и величина «помеховых» составляющих будут определены ниже.

Аналогично рассуждая, получаем рабочую формулу для измеряемого релятивистского смещения ведомой шкалы времени τ_2 относительно базовой шкалы τ_1 в виде функции разности гравитационных потенциалов:

$$\frac{\Delta \tau_{rel}^{ms}}{\tau_1} = \frac{\left(\tau_2 - \tau_1\right)_{rel}^{ms}}{\tau_1} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} + \frac{\delta \tau_{rel}^{cal}}{\tau_1}, \quad \delta \tau_{rel}^{cal} = \delta \tau_{\Omega}^{=} + \delta \tau_{\Omega}^{\approx} + \delta \tau_{\varphi}^{\approx} \tag{5}$$

где $\delta\tau_{rel}^{cal} = \delta\tau_{\Omega}^{=} + \delta\tau_{\Omega}^{\approx} + \delta\tau_{\varphi}^{\approx}$ — сумма вычисляемых взаимных «помеховых» смещений шкал времени пары атомных часов, вызванных теми же причинами, что и в случае определения частоты, причём $\delta\tau_{\Omega}^{=} = \tau_1\left(\delta f_{\Omega}^{=} / f_1\right)$. «Помеховые» смещения шкал времени определены ниже.

Если в формуле (5) пренебречь слабопеременными «помеховыми» составляющими, то приходим к классическому определению эффекта гравитационного замедления времени [18, 19].

1.2. Определение ортометрической высоты и превышения геоида по измерениям гравитационного смещения частоты и времени

Ортометрическая высота наземной точки размещения СЧВ отсчитывается от поверхности геоида, потенциал на поверхности которого φ_G одинаков во всех точках поверхности Земли. Поэтому вводя в рассмотрение потенциал на поверхности геоида, потенциалы точек измерения на поверхности Земли в предыдущих формулах преобразуем к виду:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \varphi_G - \Delta\varphi_1 = \varphi_G - \int_0^{H_1^{ort}} g_1(H)\,dH \approx \varphi_G - \bar{g}_1 H_1^{ort};\\
&\varphi_2 = \varphi_G - \Delta\varphi_2 = \varphi_G - \int_0^{H_2^{ort}} g_2(H)\,dH \approx \varphi_G - \bar{g}_2 H_2^{ort};\\
&\varphi_2 - \varphi_1 = \bar{g}_1 H_1^{ort} - \bar{g}_2 H_2^{ort},
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ — средние значения ускорения свободного падения вдоль отвеса в точках, где размещаются СЧВ; H_1^{ort}, H_2^{ort} — ортометрические высоты точек размещения СЧВ. Знак минус перед интегралами подчёркивает факт уменьшения потенциала Земли с высотой.

Подставляя выражения для потенциалов из (6) в формулы (4) и (5), получаем формулы для определения неизвестной высоты СЧВ-2 H_2^{ort} и разности высот СЧВ-1 и СЧВ-2 ΔH_{21}^{ort} через измеряемые и вычисляемые релятивистские смещения времени и частоты, средние значения ускорения свободного падения в точках размещения СЧВ, а также через известное значение ортометрической высоты опорного СЧВ-1 H_1^{ort}:

$$H_2^{ort} = \frac{\bar{g}_1}{\bar{g}_2} H_1^{ort} + \frac{c^2}{\bar{g}_2}\left(\frac{\Delta\tau_{rel}^{ms}}{\tau_1} - \frac{\delta\tau_{rel}^{cal}}{\tau_1}\right);\ \Delta H_{21}^{ort} = H_1^{ort}\left(\frac{\bar{g}_1}{\bar{g}_2} - 1\right) + \frac{c^2}{\bar{g}_2}\left(\frac{\Delta\tau_{rel}^{ms}}{\tau_1} - \frac{\delta\tau_{rel}^{cal}}{\tau_1}\right); \tag{7}$$

$$H_2^{ort} = \frac{\bar{g}_1}{\bar{g}_2} H_1^{ort} + \frac{c^2}{\bar{g}_2}\left(\frac{\Delta f_{rel}^{ms}}{f_1} - \frac{\delta f_{rel}^{cal}}{f_1}\right);\ \Delta H_{21}^{ort} = H_1^{ort}\left(\frac{\bar{g}_1}{\bar{g}_2} - 1\right) + \frac{c^2}{\bar{g}_2}\left(\frac{\Delta f_{rel}^{ms}}{f_1} - \frac{\delta f_{rel}^{cal}}{f_1}\right), \tag{8}$$

где $\Delta H_{21}^{ort} = H_2^{ort} - H_1^{ort}$ — искомая разность ортометрических высот; $\Delta\tau_{rel}^{ms} = \left(\tau_2 - \tau_1\right)_{rel}^{ms}$, $\Delta f_{rel}^{ms} = \left(f_2 - f_1\right)_{rel}^{ms}$ — измеряемые разности релятивистских смещений времени и частоты двух СЧВ квантового нивелира.

Далее по известной формуле определяется превышение геоида над земным эллипсоидом в точке размещения СЧВ-2:

$$N_2 = h_2 - H_2^{ort}, \tag{9}$$

где h_2 — геодезическая высота точки измерения на поверхности Земли, определяемая с помощью навигационной аппаратуры глобальных навигационных спутниковых систем ГЛОНАСС/GPS. По этим данным строится искомый профиль высот геоида вдоль выбранного направления.

Из последних формул следует, что при относительной нестабильности измерительных СЧВ $\delta f / f_1 = 10^{-17}$ достижимая погрешность измерения ортометрической высоты составляет 9 см, при $\delta f / f_1 = 10^{-19}$ — около 1 мм, что уже соответствует требованиям программы GGOS. Переходя к соответствующим требованиям к точности измерений расхождений шкал времени СЧВ квантового нивелира, получаем, что на суточном интервале времени $\tau_0 = 8{,}64 \cdot 10^4$ с при $\delta f / f_1 = \delta\tau / \tau_1 = 10^{-17}$ и погрешности измерения высоты 9 см соответствующая инструментальная погрешность измерения расхождения шкал времени не должна превышать $\delta\tau \approx 0{,}86$ пс. При $\delta f / f_1 = 10^{-19}$ и погрешности по высоте 1 мм, соответственно, $\delta\tau \approx 0{,}0086$ пс = 8,6 фс. Этими цифрами далее будем руководствоваться как пороговыми при оценке необходимости учёта «помеховых» релятивистских эффектов.

2. «Помеховые» релятивистские эффекты в квантовом нивелире

2.1. Статические эффекты вследствие неоднородности поля ГПЗ и равномерного вращения Земли

Проанализируем мешающие факторы, входящие в формулы (4) и (5). Потенциал ГПЗ, входящий в эти формулы, часто для удобства условно представляют в виде суммы нормальной и аномальной составляющих. Нормальная составляющая, которая включает нулевую и вторую зональную гармонику разложения, представляется в виде:

$$\varphi = \frac{\mu_e}{\rho}\left[1 - J_{02}\left(\frac{R_e}{\rho}\right)^2\left(\frac{3}{2}\sin^2\psi - \frac{1}{2}\right)\right], \tag{10}$$

где $J_{02} = 1{,}0826 \cdot 10^{-3}$ — коэффициент второй зональной гармоники; ψ — геоцентрическая широта; $\mu_e = 3{,}986 \cdot 10^{14}$ м^3/с^2 — геоцентрическая гравитационная постоянная; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — геоцентрическое расстояние рассматриваемой точки; $R_e = 6{,}378 \cdot 10^6$ м — экваториальный радиус Земли (большая полуось референц-эллипсоида). Аномальная составляющая представляется в виде ряда разложения по сферическим функциям с более высокими степенями R_e/ρ. Существует множество моделей потенциала ГПЗ, но наиболее полной на сегодняшний день является модель EGM2008, содержащая 2159 гармоник.

Полагая, что $\rho_2 = \rho_1 + H$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, где $H \ll \rho_1$ — высота вторых часов относительно первых, то на основе этой формулы разность потенциалов двух точек на поверхности Земли составит:

$$\varphi_1 - \varphi_2 \approx gH\left[1 - 3J_{20}\left(\frac{3}{2}\sin\psi - \frac{1}{2}\right)\right]. \qquad (11)$$

Оценим величину обеих составляющих этой формулы. Первая составляющая является полезной, поскольку несёт информацию о высоте, вторую будем считать помеховой. Разностное относительное гравитационное смещение частоты и относительное гравитационное смещение шкал времени двух наземных часов $\Delta f_{rel}^{ms} / f_1 = \Delta\tau_{rel}^{ms} / \tau_1 = (\varphi_1 - \varphi_2) / c^2 \approx g_1 H / c^2$ невелико: при превышении высоты СЧВ-2 относительно высоты СЧВ-1 на +1000 м у поверхности Земли оно составляет $\approx +10^{-13}$. Знак указывает на то, что потенциал с ростом высоты уменьшается, а часы на большей высоте («верхние») опережают «нижние». «Нижние» часы, находящиеся в точке с более высоким потенциалом, идут медленнее. Образно говоря, ход атомных часов, находящихся ближе к центру Земли, как бы «замораживается» в более «плотном» гравитационном поле. На суточном интервале $\Delta\tau_1 = 8{,}64 \cdot 10^4$ с соответствующее взаимное смещение шкал времени составляет $\tau_2 - \tau_1 = \Delta\tau_1 g_1 H / c^2 \approx +8{,}6$ нс. С использованием СЧВ с нестабильностью 10^{-17} это смещение частоты и времени можно измерить с относительной погрешностью 10^{-4}, что обеспечит, как отмечалось, погрешность измерения разности высот 9 см.

При той же разности высот взаимные смещения шкал времени пары наземных часов, определяемые вторым слагаемым формулы (11) с коэффициентом $J_{02} = 1{,}083 \cdot 10^{-3}$ при второй зональной гармонике, на 3 порядка меньше (единицы пикосекунд). Это релятивистское расхождение легко вычисляется по априорным данным и вводится как поправка. Влияние коэффициентов других зональных, секториальных и тессеральных гармоник ещё на 2–3 порядка меньше и составляет единицы фемтосекунд. В этой связи их влияние дальше не рассматривается.

Чтобы вычислить постоянную составляющую разностного эффекта Доплера II порядка $\delta f_{\Omega}^{=} / f_1 = \left(V_1^{2=} - V_2^{2=}\right) / 2c^2$ в формуле (5), воспользуемся общим соотношением для линейной скорости точки на поверхности Земли (индексы опускаются):

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = \left(\Omega_y z - \Omega_z y\right)^2 + \left(\Omega_z x - \Omega_x z\right)^2 + \left(\Omega_x y - \Omega_y x\right)^2, \qquad (12)$$

где Ω_x, Ω_y, Ω_z — составляющие угловой скорости движения наземных СЧВ в системе ICRS с учётом неравномерности вращения Земли; x, y, z — текущие координаты СЧВ в ICRS. Далее для равномерно вращающейся Земли принимаем, что $\Omega_x = \Omega_y = 0$, причём $\Omega_z = \Omega_0 = 7{,}292115 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ — среднее значение угловой скорости Земли. При этих допущениях соответствующие члены формул (4, 5) могут быть представлены в двух формах:

$$\frac{\Delta f_{\Omega}^{=}}{f_1} = \frac{\Delta \tau_{\Omega}^{=}}{\tau_1} = \frac{\Omega_0^2}{2c^2}\left(R_1^2 \cos^2 \psi_1 - R_2^2 \cos^2 \psi_2\right) = \frac{\Omega_0^2}{2c^2}\left[\left(x_1^2 + y_1^2\right) - \left(x_2^2 + y_2^2\right)\right]. \quad (13)$$

При размещении базовых стационарных часов квантового нивелира вблизи экватора ($\psi_1 = 0$), вторых часов нивелира — вблизи полюса ($\psi_2 = 90°$) при равенстве их высот ($R_1 = R_2 = R_e$) абсолютное значение смещения частоты оценивается величиной $f_2 - f_1 = \delta f_{\Omega}^{=} = +f_1(1{,}2 \cdot 10^{-12})$. Отсюда соответствующий временной релятивистский сдвиг $\tau_2 - \tau_1 = +1{,}2 \cdot 10^{-12} \Delta\tau_1$. Как и следовало ожидать, «северные приполярные» наземные часы идут быстрее «южных», экваториальных, имеющих более высокую скорость обращения вокруг центра Земли. При таком размещении часов на суточном интервале при $\Delta\tau_1 = 8{,}64 \cdot 10^4$ с релятивистское расхождение шкал времени вследствие эффекта Доплера II порядка не превышает +1 нс. При других значениях геоцентрической широты релятивистские сдвиги меньше.

При перемещении экваториальных часов на высоту 1000 м дополнительное относительное смещение частоты составит $3{,}8 \cdot 10^{-16}$, а суточное смещение шкалы времени — 32 пс.

Рассмотренные смещения могут быть вычислены с достаточной степенью точности по текущим координатам, определяемым с помощью ГНСС. В частности, при погрешности определения координат с помощью НАП ГНСС менее 1 м относительная погрешность вычисления смещений (11) не превышает 10^{-17}–10^{-18}.

2.2. Взаимные релятивистские смещения времени и частоты пары наземных часов вследствие неравномерности вращения Земли

Вектор угловой скорости неравномерно вращающейся Земли в небесной земной системе координат ICRS представим в виде [20]:

$$\Omega = i\Omega_x + j\Omega_y + k\Omega_z; \qquad \Omega_z = \Omega_0 + \Delta\Omega_z, \quad (14)$$

где Ω_0 — номинальное (среднее) значение модуля угловой скорости Земли; $\Delta\Omega_z$ — отклонение угловой скорости от номинального значения (девиация), характеризующее неравномерность суточного вращения Земли и содержащее линейную по времени часть, а также годичную и полугодичную волны. Данные о текущих значениях угловой скорости вращения Земли регулярно публикуются в специальных бюллетенях. В последние годы значение отношения $\Delta\Omega_z / \Omega_0$ изменялось в пределах $-(3\text{–}18{,}7) \cdot 10^{-9}$ с$^{-1}$. Помимо указанной вариации угловой скорости, неравномерность вращения Земли относительно небесной системы координат ICRS характеризуется угловой скоростью прецессии Ω^{pr}, угловой скоростью нутации оси вращения Земли Ω^{n}, а также угловой скоростью конусообразующего движения линии полюсов Земли вокруг её оси вращения Ω^{p} [21, 22]. Вычисленные составляющие угловой скорости Земли (12) по осям имеют вид [20]:

$$\Omega_x = \Omega_x^n + \Omega_x^p; \quad \Omega_y = \Omega_y^{pr} + \Omega_y^n + \Omega_y^p; \quad \Omega_z = \Omega_0 + \Delta\Omega_z + \Omega_z^{pr}, \qquad (15)$$

где

$$\Omega_x^{pr} = 0; \quad \Omega_y^{pr} \approx -\vartheta_{pr} \sin\varepsilon \approx -3{,}2 \cdot 10^{-12} c^{-1}; \quad \Omega_z^{pr} \approx \vartheta_{pr} \cos\varepsilon \approx 6{,}3 \cdot 10^{-12} c^{-1}, \qquad (16)$$

$\varepsilon \approx 23{,}4°$ — средний наклон эклиптики к экватору; прецессия $\vartheta_{pr} \approx 50''$/год ($2{,}5 \cdot 10^{-4}$ рад/год);

$$\begin{gathered} \Omega_x^n \approx \Omega_0 \sin\vartheta_n \cos\Phi_n \approx \Omega_0 \vartheta_n \cos\Phi_n; \\ \Omega_y^n \approx \Omega_0 \sin\vartheta_n \sin\Phi_n \approx \Omega_0 \vartheta_n \sin\Phi_n; \qquad \Omega_z^n \approx 0, \end{gathered} \qquad (17)$$

где $\Phi_n = 2\pi\tau/T_n - \varphi_n$ — полная фаза нутации; T_n, φ_n — период и начальная фаза нутации. Поскольку $\vartheta_n \approx 10''$ ($\sim 5 \cdot 10^{-5}$ рад) [21], амплитуда составляющих угловой скорости нутации по осям OX, OY не превышает $(\Omega_x^n, \Omega_y^n)_{\max} \approx$ $\approx 3{,}7 \cdot 10^{-9} c^{-1}$;

$$\Omega_x^p \approx \Omega_0 \vartheta_p \cos\Phi_p; \qquad \Omega_y^p \approx \Omega_0 \vartheta_p \sin\Phi_p; \qquad \Omega_z^p \approx 0, \qquad (18)$$

где $\Phi_p = 2\pi\tau/T_p - \varphi_p$ — полная фаза колебания полюса; T_p, φ_p — период и начальная фаза колебания полюса. Амплитуда угловых скоростей по осям вследствие «качания» полюсов достигает $1{,}8 \cdot 10^{-10}$ с$^{-1}$.

На основании исходных соотношений (2), (10–13) выражение для взаимного смещения шкал времени пары наземных часов, вызванных неравномерностью вращения Земли, получаем в виде суммы:

$$\begin{gathered} \frac{\delta f_\Omega^{\approx}}{f_1} = \frac{\Omega_0 \Omega_y}{c^2}\left(y_2 z_2 - y_1 z_1\right) + \frac{\Omega_0 \Omega_x}{c^2}\left(x_2 z_2 - x_1 z_1\right) + \\ + \frac{\Omega_0 R_e^2 \left(\Delta\Omega_z + \Omega_z^{pr}\right)}{c^2}\left(\cos^2\psi_2 - \cos^2\psi_1\right). \end{gathered} \qquad (19)$$

С помощью этой формулы по координатам обоих часов вычисляется влияние переменных факторов неравномерности вращения на их взаимный ход. Для упрощения анализа полученного результата выполним переход от текущих прямоугольных координат часов к сферическим по формулам:

$$x(\tau) = R\cos\psi\cos\left(\Omega_0\tau + \lambda\right); \quad y(\tau) = R\cos\psi\sin\left(\Omega_0\tau + \lambda\right); \quad z = R\sin\psi, \qquad (20)$$

где R_e, ψ, $\lambda(\tau)$ — радиус-вектор, геоцентрическая широта и текущая долгота точек на поверхности вращающейся Земли.

Для оценки величины первого слагаемого соотношения (17), вызванного влиянием Ω_y, преобразуем его при условиях: $\psi_2 = \psi_1 = \psi$ и $\lambda_2 = \lambda_1 + \pi$ (пара часов находится на одной широте, но долгота часов отличается на 180°). В результате при $R_2 = R_1 = R_e$ имеем:

$$\frac{\delta f_{\Omega y}}{f_1} = \frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2}\left(\Omega_y^{pr} + \Omega_y^n + \Omega_y^p\right)\sin 2\psi \sin\left(\Omega_0\tau + \lambda_2\right). \quad (21)$$

Оценка амплитуд вкладов каждой составляющей неравномерности вращения Земли в относительное релятивистское смещение частоты даёт следующие результаты: по нутации — $1{,}2 \cdot 10^{-16}$; по отклонению полюсов — $0{,}6 \cdot 10^{-17}$; по прецессии — $1 \cdot 10^{-19}$. Эти эффекты имеют суточный период колебания, и их амплитуда максимальна при размещении часов на широте 45° и разнице в долготе на 180°.

Влияние угловой скорости Ω_x (второе слагаемое (17)) при тех же условиях определяется формулой:

$$\frac{\delta f_{\Omega x}}{f_1} = \frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2}\left(\Omega_x^n + \Omega_x^p\right)\sin 2\psi \sin\left(\Omega_0\tau + \lambda_2\right). \quad (22)$$

Оценки вкладов Ω^n, Ω^p по величине аналогичны предыдущим, однако здесь нет влияния прецессии.

Для оценки влияния неравномерности вращения по оси OZ в третьем слагаемом формулы (17) примем условие $\psi_1 = 0°$, $\psi_2 = 90°$ (базовые часы — на экваторе, мобильные измерительные — вблизи полюса). В результате имеем:

$$\frac{\delta f_{\Omega z}}{f_1} = -\frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2}\left(\Delta\Omega_z + \Omega_z^{pr}\right). \quad (23)$$

При условии, что отношение $\Delta\Omega_z / \Omega_0$ в последние годы достигало, как отмечалось выше, величины $1{,}87 \cdot 10^{-8}$, его вклад в сдвиг частоты составит $5 \cdot 10^{-20}$. Вклад прецессии при этом составляет $1 \cdot 10^{-19}$. Важной особенностью смещения частоты (20) является её независимость от суточного вращения.

Релятивистский взаимный набег шкал времени двух наземных часов вычисляется путём интегрирования по формуле (1) на основе частотных смещений (19–21) и даёт следующие результаты:

- по влиянию составляющей угловой скорости Ω_y:

$$\delta\tau_{\Omega y} = \int \frac{\delta f_{\Omega y}}{f_1} d\tau_1 = \frac{R_e^2}{c^2}\left(\Omega_y^n + \Omega_y^p + \Omega_y^{pr}\right)\sin 2\psi \cos\left(\Omega_0\tau_1 + \lambda_B\right). \quad (24)$$

  Оценка амплитуды периодических суточных эффектов, определяемых этой формулой, составила: по нутации — 1,7 пс; по отклонению полюсов — 0,08 пс; по прецессии — $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ пс;
- по влиянию составляющей угловой скорости Ω_x: если не учитывать очень малый эффект прецессии, то можно считать $\delta\tau_{\Omega x} = \delta\tau_{\Omega y}$;
- по влиянию изменений угловой скорости, направленной вдоль оси OZ:

$$\delta\tau_{\Omega z} = \int \frac{\delta f_{\Omega z}}{f_1} d\tau_1 = \frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2}\left(\Delta\Omega_z + \Omega_z^{\text{ПР}}\right)\Delta\tau_1. \quad (25)$$

При среднем значении отношения $\Delta\Omega_z / \Omega_0 \approx 100 \cdot 10^{-10}$ с$^{-1}$ и интервале интегрирования 3 месяца (четверть периода изменения $\Delta\Omega_z$) эффект смещения шкалы времени составляет около 0,2 пс. Эффект прецессии на интервале 1 год составляет 3,1 пс.

2.3. Взаимные приливные релятивистские смещения времени и частоты СЧВ квантового нивелира

Следуя известным исследованиям [23, 24], определим дополнительную приливную разность потенциалов между точкой на поверхности Земли и началом геоцентрической системы отсчёта, вносимую гравитационными полями ближайших небесных тел, в виде:

$$\delta\varphi^i = D_i\left(\cos 2z_i - \frac{1}{3}\right), \tag{26}$$

где $D_i = 3GM_i R_e^2 / 4r_i^3$ — постоянная Дудсона; G — гравитационная постоянная; M_i — масса возмущающего небесного тела; r_i — расстояние от центра Земли до небесного тела; z_i — зенитное расстояние рассматриваемой точки на Земле относительно направления на небесное тело; R_e — радиус Земли. Индекс $i = M, S$ обозначает влияние Луны и Солнца. Для Луны ($i = M$) D_M = 2,6206 м^{2}с$^{-2}$; для Солнца ($i = S$) D_S = 1,2035 м^{2}с$^{-2}$ [24].

Взаимные релятивистские смещения шкал частоты и времени пары наземных СЧВ квантового нивелира, возникающих вследствие приливных явлений, определим из формул (1), (4), (5) на основе формулы (24) в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta f_\varphi^{\approx}}{f_1} = \frac{\left(f_2 - f_1\right)_\varphi^{\approx}}{f_1} = \frac{1}{c^2}\sum_i^{M,S}\left(\delta\varphi_1^i - \delta\varphi_2^i\right); \quad (a) \\ &\Delta\tau_\varphi^{\approx} = \left(\tau_2 - \tau_1\right)_\varphi^{\approx} = \frac{1}{c^2}\int_{\tau_1} \frac{\Delta f_\varphi^{\approx}}{f_1} d\tau_1 = \frac{1}{c^2}\sum_i^{M,\,S}\left(\delta\varphi_1^i - \delta\varphi_2^i\right) d\tau_1. \quad (\textit{б}) \end{aligned} \tag{27}$$

Суммарный потенциал на поверхности Земли определим в виде суммы потенциала Земли как шара φ_e и приливного потенциала (24):

$$\varphi_C = \varphi_e + \sum_i \delta\varphi^i. \tag{28}$$

Приливный потенциал (24), воздействуя на Землю, вызывает появление двух дополнений к суммарному потенциалу (26).

Первое дополнение вызвано изменением уровенной поверхности или уровня эквипотенциальной поверхности геоида, что хорошо наблюдается на акватории океана. Это изменение составляет:

$$\varsigma_0 = \frac{\delta\varphi^i}{g}, \tag{29}$$

где $g = \mu_e / R_e^2$ — ускорение свободного падения.

На поверхности суши это изменение меньше. Уровень поверхности твёрдой упругой Земли как бы «тянется» за этим изменением, однако в точности его не повторяет. Поэтому в первом приближении приливное изменение высоты твёрдой поверхности Земли, на которой размещены исследуемые часы, несколько меньше и определяется формулой:

$$\varsigma = h\varsigma_0 = h\frac{\delta\varphi^i}{g}, \tag{30}$$

где h = 0,5 — первое число Лява [24].

Вследствие изменения высоты поверхности Земли изменяется и потенциал ГПЗ на её поверхности. Приливное увеличение радиуса Земли (подъём точки поверхности) должно приводить к незначительному уменьшению потенциала ГПЗ. Действительно, принимая форму Земли в виде шара, потенциал ГПЗ с учётом (27) и (28) в точке размещения часов при условии $\varsigma \ll R_e$ получаем в виде:

$$\varphi_e = \frac{\mu_e}{R_e + \varsigma} \approx \frac{\mu_e}{R_e} - h\delta\varphi^i. \tag{31}$$

Второе дополнение вызвано тем, что при воздействии приливных потенциалов происходит деформирование Земли и, как следствие, перераспределение её массы, вследствие чего изменяется и собственный потенциал планеты. При этом второе дополнение к приливообразующему потенциалу составляет:

$$\delta\varphi_k^i = k\delta\varphi^i, \tag{32}$$

где k = 0,2 — второе число Лява [24].

В результате, используя выражение для φ_e (29) и прибавляя к (26) дополнительный потенциал (30), соотношение для суммарного потенциала (26) приводим к виду:

$$\varphi_C = \frac{\mu_e}{R_e} + \gamma\sum_i \delta\varphi^i, \tag{33}$$

где $\gamma = 1 + k - h = 0{,}7$; потенциал $\delta\varphi^i$ определяется формулой (24).

Отсюда следует итоговое выражение для суммарного приливного потенциала в некоторой точке k на поверхности Земли:

$$\delta\varphi_k = \gamma\sum_i \delta\varphi^i, \tag{34}$$

а также разности приливных потенциалов между точками установки часов:

$$\delta(\varphi_1 - \varphi_2) = \gamma\sum_i \left(\delta\varphi_1^i - \delta\varphi_2^i\right). \tag{35}$$

Оценку разностных приливных смещений частоты и времени двух стационарных часов проведём на основе формул (25а, б), которые с учётом (33) приобретают вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta f_\varphi^{\approx}}{f_1}=\frac{(f_2-f_1)_\varphi^{\approx}}{f_1}=\frac{\gamma}{c^2}\sum_{i=M,S}\left(\delta\varphi_1^i-\delta\varphi_2^i\right); \quad (a)\\ &\Delta\tau_\varphi^{\approx}=\left(\tau_2-\tau_1\right)_\varphi^{\approx}=\int_{\tau_1}\frac{\Delta f_\varphi^{\approx}}{f_1}d\tau_1. \quad (б)\end{aligned} \tag{36}$$

В формуле для приливного потенциала (24) единственной переменной можно считать только зенитное расстояние возмущающего светила. Преобразование этой формулы с учётом этого условия проведём с использованием известных соотношений сферической тригонометрии [23]:

$$\cos z=\sin\psi\ \sin\delta+\cos\psi\ \cos\delta\ \cos t_{\odot},$$

где ψ — широта места установки часов на Земле; δ — склонение светила; $t_{\odot}$ — часовой угол светила. В результате этих преобразований суммарный приливный потенциал (32) для каждой наземной точки размещения СЧВ (k = = 1; 2) получаем в виде:

$$\begin{aligned}\delta\varphi_k^i=\gamma D_i\Bigg[3\left(\sin^2\delta_i-\frac{1}{3}\right)\left(\sin^2\psi_k-\frac{1}{3}\right)+\\ +\cos t_{\odot k}^i\sin 2\delta_i\sin 2\psi_k+\cos 2t_{\odot k}^i\cos^2\delta_i\cos^2\psi_k\Bigg],\end{aligned} \tag{37}$$

где $i = M, S$; $k = 0$; m.

Полученное соотношение определяет приливную волну потенциала как сумму зональных волн (первое слагаемое в скобке), тессеральных (второе слагаемое), а также секториальных приливных волн (третье слагаемое) [23]. При этом важно отметить, что нулевое значение зональная волна принимает при $\psi_k \approx \pm 37^{\circ}$, что следует из соотношения (35) при условии $\sin^2\psi_k - 1/3 = 0$.

Используя выражение (35), можно найти искомые взаимные релятивистские смещения частоты и времени двух часов (34) через суммарное приливное воздействие ближайших небесных тел. Для любого из этих тел ($i = M$; S) выражение для разностного приливного релятивистского частотного сдвига (34а) удобно представить в виде суммы трёх слагаемых:

$$\frac{\Delta f_\varphi^{i\approx}}{f_1}=\frac{\Delta f_{\varphi A}^{i\approx}}{f_1}+\frac{\Delta f_{\varphi B}^{i\approx}}{f_1}+\frac{\Delta f_{\varphi C}^{i\approx}}{f_1}, \tag{38}$$

где с учётом связи $\sin^2\delta = (\cos 2\delta + 1) / 2$ имеем:

$$\frac{\Delta f_{\varphi A}^{i\approx}}{f_1}=\frac{3\gamma D_i}{2c^2}\left[\left(\sin^2\psi_1-\frac{1}{3}\right)\left(\cos 2\delta_1+\frac{1}{3}\right)-\left(\sin^2\psi_2-\frac{1}{3}\right)\left(\cos 2\delta_2+\frac{1}{3}\right)\right]; \tag{39}$$

$$\frac{\Delta f_{\varphi B}^{i\approx}}{f_1}=\frac{\gamma D_i}{c^2}\left(\sin 2\psi_1\sin 2\delta_1\cos t_{\odot 1}-\sin 2\psi_2\sin 2\delta_2\cos t_{\odot 2}\right); \tag{40}$$

$$\frac{\Delta f_{\varphi C}^{i\approx}}{f_1} = \frac{\gamma D_i}{c^2}\left(\cos^2\psi_1\cos^2\delta_1\cos 2t_{\odot 1} - \cos^2\psi_2\cos^2\delta_2\cos 2t_{\odot 2}\right). \qquad (41)$$

Проанализируем полученные формулы (37−39).

Поскольку для обоих часов склонение светила примерно одинаковое, то при размещении их на разных широтах формула (37) преобразуется к виду:

$$\frac{\Delta f_{\varphi A}^{i\approx}}{f_1} = \frac{3\gamma D_i}{2c^2}\left(\cos 2\delta_i + \frac{1}{3}\right)\left[\left(\sin^2\psi_1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\sin^2\psi_2 - \frac{1}{3}\right)\right]. \qquad (42)$$

Выражение во второй скобке есть величина постоянная, нулевые значения составляющих этой скобки принимают, как отмечалось, при ψ_1, $\psi_2 \approx \approx \pm 37°$, а также при $\psi_2 = \pm\psi_1$. Изменение этого смещения во времени происходит только по причине изменения склонения светила. Период изменения рассматриваемой составляющей приливного смещения частоты составляет полгода для Солнца и полмесяца для Луны. Учитывая, что для Луны $D_M = 2{,}6206$ м^{2}с$^{-2}$, а для Солнца $D_S = 1{,}2035$ м^{2}с$^{-2}$ [24], максимальное значение рассматриваемого взаимного частотного смещения пары часов достигается при условии $\psi_1 = 0$; $\psi_2 = \pm 90°$ и составляет для Луны — $3 \cdot 10^{-17}$, для Солнца — $1{,}4 \cdot 10^{-17}$.

Смещение (38) преобразуем при условии установки часов на одной и той же широте, то есть при $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, а также при одном значении склонения. В результате на основе формул преобразования произведений тригонометрических функций при равенстве склонений получаем:

$$\frac{\Delta f_{\varphi B}^{i\approx}}{f_1} = \frac{2\gamma D_i}{c^2}\sin 2\psi \ \sin 2\delta \ \sin\left(t_{\odot 1} + \frac{\Delta t_\odot}{2}\right)\sin\frac{\Delta t_\odot}{2}, \qquad (43)$$

где $\Delta t_\odot = t_{\odot 2} - t_{\odot 1}$ — постоянная разность часовых углов светила между точками установки измерительных СЧВ квантового нивелира из-за их географического разноса по долготе. Отсюда следует, что данное смещение имеет суточный период колебания, причём максимальная амплитуда соответствует разносу часов по долготе 180° $\left(\sin\frac{\Delta t_\odot}{2} = 1\right)$. Максимальное значение разности частот $2\gamma D / c^2$ достигается при $\psi = \delta = 45°$ и составляет для Луны — $4 \cdot 10^{-17}$, для Солнца — $1{,}8 \cdot 10^{-17}$.

Смещение (39) при тех же условиях преобразуем к виду:

$$\frac{\Delta f_{\varphi C}^{i\approx}}{f_1} = -\frac{2\gamma D_i}{c^2}\cos^2\psi\cos^2\delta\sin\left(2t_{\odot 1} + \Delta t_\odot\right)\sin\Delta t_\odot. \qquad (44)$$

Отсюда видно, что данное смещение имеет полусуточный период колебания, а максимального значения достигает при разносе часов по долготе на 90°. Амплитуда полусуточного колебания частоты равна амплитуде его суточного колебания.

Соответствующее суммарное приливное смещение шкалы времени СЧВ-2 относительно шкалы СЧВ-1 определяется формулой (34б) путём интегрирования в шкале времени τ_1 приливных частотных сдвигов, определяемых соотношениями (36)–(39). Оценка показывает, что амплитуда суточного приливного смещения времени не превышает 1 пикосекунды.

Среди причин гравитационных помеховых неприливных воздействий следует упомянуть изменения влагонасыщённости пород, изменения атмосферного давления и температуры окружающего воздуха. При этом наибольшее влияние на изменение гравитационного потенциала оказывает изменение характеристик атмосферного столба, которое составляет до 20% от величины приливных колебаний. Используя предыдущие материалы о приливных воздействиях, можно сделать вывод о незначительности влияний неприливных факторов.

3. Методы измерения параметров ГПЗ на основе эффекта замедления времени

3.1. Измерение ортометрической высоты с помощью стационарных атомных часов

Метод измерения ортометрической высоты с помощью стационарных атомных часов основан на измерении релятивистского (в данном случае гравитационного) взаимного набега шкал времени двух часов на некотором известном интервале времени наблюдения τ_{obs}, например на интервале в одни сутки. Интервал отсчитывается по базовым часам. При этом в начале суточного интервала производится начальная синхронизация шкал времени, в результате которой определяется начальное расхождение шкал времени по одноименным (например, секундным) меткам времени обеих шкал. По завершении суточного интервала снова определяется расхождение обеих временных шкал между одноименными метками времени, которое уже несёт информацию о гравитационном расхождении шкал времени, накопленном в течение суток.

Формулу для измеряемого расхождения секундных меток на интервале наблюдения τ_{obs} с учётом гравитационного эффекта представим на основе (5) и (1) в виде:

$$(\Delta\tau_{rel}^{ms})_{obs} = \left[\left(\tau_{20} + \tau_{obs}\right) - \left(\tau_{10} + \tau_{obs}\right)\right] = \tau_{obs}\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} + \delta\tau_{obs}^{cal}, \qquad (45)$$

где τ_{10}, τ_{20} — показания шкал, соответствующие одноименной секундной метке; $\delta\tau_{obs}^{cal}$ — «помеховые» составляющие временного смещения, соответствующие концу интервала τ_{obs} и определяемые в соответствии с формулой (5).

Система двух уравнений, описывающих измерения, соответствующие началу и концу интервала наблюдения τ_{obs}, выглядит следующим образом:

$$(\Delta\tau_{rel}^{ms})_0 = \left(\tau_{20} - \tau_{10}\right)_0^{ms} = \delta\tau_0; \tag{46}$$

$$(\Delta\tau_{rel}^{ms})_{obs} = \left[\left(\tau_{20} + \tau_{obs}\right) - \left(\tau_{10} + \tau_{obs}\right)\right]_{obs}^{ms} = \delta\tau_0 + \tau_{obs}\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} + \delta\tau_{obs}^{cal}\right), \tag{47}$$

где $\delta\tau_0$ — начальное расхождение шкал времени по одноименным секундным меткам.

Отсюда следует формула для искомой разности потенциалов:

$$\frac{(\Delta\tau_{rel}^{ms})_{obs} - (\Delta\tau_{rel}^{ms})_0}{\tau_{obs}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} + \frac{\delta\tau_{obs}^{cal}}{\tau_{obs}}. \tag{48}$$

На основе формул (6) отсюда следует выражение для искомой высоты:

$$H_2^{ort} = \frac{g_1}{g_2} H_1^{ort} + \frac{c^2}{g_2\tau_{obs}}\left[(\Delta\tau_{rel}^{ms})_{obs} - (\Delta\tau_{rel}^{ms})_0 - \delta\tau_{obs}^{cal}\right]. \tag{49}$$

На практике наиболее приемлемыми интервалами наблюдения являются суточный (τ_{obs} = 24 ч) и кратные ему ($\tau_{obs} = n \cdot 24$ ч).

Другое применение системы стационарных СЧВ с системами взаимной синхронизации заключается в возможности непрерывного мониторинга разности потенциалов между двумя наземными точками. Приливные изменения прогнозируются достаточно хорошо. Неприливные изменения, вызываемые вулканической деятельностью, смещениями земной коры, изменением уровня грунтовых вод и т.д., прогнозируются трудно.

Для выполнения мониторинга необходимо наблюдать (измерять) ускорения свободного падения в точках размещения пары СЧВ и релятивистские расхождения их шкал времени по одноименным секундным меткам через равные промежутки времени на достаточно длительном интервале времени. Уравнение наблюдения следует из (48) и (6):

$$\begin{gathered}\frac{\Delta\tau_{obs^i}^{ms} - \Delta\tau_{obs^{i-1}}^{ms}}{\tau_{obs^i}} = \frac{\Delta\varphi_i}{c^2} + \frac{\delta\tau_{obs^i}^{cal} - \delta\tau_{obs^{i-1}}^{cal}}{\tau_{obs^i}};\\ \Delta\varphi_i = g_{2i}H_{2i}^{ort} - g_{1i}H_{1i}^{ort},\end{gathered} \tag{50}$$

где i — номер суточного интервала наблюдения.

Измерение релятивистских смещений между разнесёнными СЧВ квантового нивелира возможно с помощью высокоточных систем синхронизации. Как уже отмечалось, для реализации погрешности измерения разности ортометрических высот около 10 см точность синхронизации оценивается погрешностью измерения расхождения шкал времени СЧВ около 1 пикосекунды, а относительная погрешность сличения частот их задающих генераторов — не хуже 10^{-17}.

Вместе с тем широко используемый дуплексный метод синхронизации СЧВ через геостационарный спутник характеризуется погрешностью около 0,5–1 нс [25]. Метод синхронизации с использованием сигналов спутников ГНСС имеет погрешность 0,1–0,15 нс, однако при использовании фазовых измерений погрешность снижается до 55 пс [26]. Метод с использованием радиоинтерферометров со сверхдлинной базой (РСДБ) также имеет погрешность более 0,1 нс, а кроме того, требует использования громоздких антенн. Синхронизация с использованием современных квантово-оптических средств обеспечивает погрешность десятки пс.

Общим фактором, ограничивающим точность этих методов, является нестационарность параметров атмосферы. Поэтому они могут использоваться в квантовых нивелирах и сети «Квантовый футшток» как средства предварительной синхронизации.

Необходимую точность измерения релятивистских эффектов в наземных измерительных системах в ближайшее время способны обеспечить метод релятивистской синхронизации на основе транспортируемых оптических атомных часов [12], а также средства синхронизации и сличения частот удалённых СЧВ на основе ВОЛС. Ниже возможности применения этих методов будут рассмотрены более подробно.

3.2. Измерение высоты с помощью мобильных атомных часов

Рассмотрим измерительную схему квантового нивелира, содержащего стационарный базовый СЧВ-1 в точке 1 на поверхности Земли и мобильный СЧВ-М, который может перемещаться по некоторому наземному маршруту в точку 2. Задача состоит в измерении разности потенциалов и ортометрических высот точек 1 и 2 с помощью мобильного СЧВ. Условимся, что опорный, или базовый стандарт частоты и времени СЧВ-1 является хранителем собственной частоты f_1 и шкалы собственного (измеряемого) времени τ_1. Мобильный СЧВ-М является хранителем собственной частоты и собственного бортового времени, соответственно, f_m, τ_m. В качестве координатного времени, как и ранее, используем геоцентрическое координатное время $t_{TCG} = t$. Текущее взаимное положение стационарных и мобильных наземных атомных часов удобно рассматривать из геоцентрической вращающейся земной системы отсчёта ITRS. Положение часов в этой системе характеризуется радиус-векторами $\vec{R}_1\{x_1 y_1 z_1\}$, $\vec{R}_m\{x_m y_m z_m\}$, а скорость перемещения мобильных часов относительно Земли — вектором $\vec{V}$.

Метрический тензор в неравномерно вращающейся земной системе ITRS имеет следующие компоненты [13]:

$$\left.\begin{aligned}
&g_{00}=-\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right);g_{\alpha\beta}=\begin{cases}1+\dfrac{2\varphi}{c^2},\ \alpha=\beta,\\ 0,\ \alpha\neq\beta;\end{cases}\\
&g_{0\alpha}=G_\alpha=\frac{[\vec{\Omega}\vec{R}]_\alpha}{c}\left(1+\frac{2\varphi}{c^2}\right);G_1=\frac{\Omega_y z}{c}-\frac{\Omega_z y}{c}\left(1+\frac{2\varphi}{c^2}\right);\\
&G_2=\frac{\Omega_z x}{c}\left(1+\frac{2\varphi}{c^2}\right)-\frac{\Omega_x z}{c};G_3=\frac{1}{c}\left(\Omega_x y-\Omega_y x\right)\left(1+\frac{2\varphi}{c^2}\right);\\
&\Phi=\varphi+\frac{1}{2}G_\alpha G^\alpha;\varphi=\varphi_e+\Delta\varphi_M+\Delta\varphi_S,
\end{aligned}\right\}\tag{51}$$

где обозначения соответствуют предыдущим.

Эта форма представления метрического тензора вращающейся земной системы отсчёта ITRS позволяет учитывать влияние приливов Луны и Солнца $\delta\varphi_M$, $\delta\varphi_S$, неравномерность вращения Земли (в виде значений Ω_x, Ω_y, $\Delta\Omega_z$), а также неоднородность статического гравитационного потенциала Земли φ_e.

Прежде чем определять релятивистские эффекты условимся, что используемые СЧВ достаточно совершенны и технические уходы их частоты и шкал времени (из-за нестабильности, температуры, влияния магнитного поля и др.) пренебрежимо малы. При этих условиях общие формулы для измеряемого релятивистского набега временной шкалы и ухода частоты задающего генератора СЧВ-М относительно шкалы базового СЧВ-1 имеют вид [13]:

$$\Delta\tau_{rel}^{ms}=\tau_m-\tau_1=\int_{\tau_{11}}^{\tau_{12}}\left(\frac{\theta_m}{\theta_1}-1\right)d\tau_1=\int_{\tau_{11}}^{\tau_{12}}\frac{\Delta f_{rel}^{ms}}{f_1}d\tau_1;\quad \frac{\Delta f_{rel}^{ms}}{f_1}=\frac{f_m-f_1}{f_1}=\frac{\theta_m}{\theta_1}-1,\tag{52}$$

где τ_{11}, τ_{12} — моменты начала и окончания интервала интегрирования по шкале τ_1; θ_1, θ_m — коэффициенты преобразования шкал собственного времени базовых и мобильных часов относительно координатного времени t, которые в системе ITRS определяются соотношениями, соответственно [13]:

$$\theta_1=1-\frac{\Phi_1}{c^2};\qquad \theta_m=1-\frac{\Phi_m}{c^2}-\frac{1}{c}\vec{G}_m\vec{V}-\frac{V^2}{2c^2},\tag{53}$$

где $\Phi_1=\varphi_{e1}+\delta\varphi_{M1}+\delta\varphi_{S1}+\vec{G}_0^2/2$ — статический гравитационный потенциал в точке размещения базовых (стационарных) часов; $\Phi_m=\varphi_{em}+\delta\varphi_{Mm}+\delta\varphi_{Sm}+$ $+\vec{G}_m^2/2$ — текущий статический потенциал вдоль трассы движения мобильных часов; $\vec{G}_1=c^{-1}[\vec{\Omega}\vec{R}_1]$, $\vec{G}_m=c^{-1}[\vec{\Omega}\vec{R}_m]$ — векторные потенциалы в точках размещения соответственно базовых и мобильных часов.

Для измерения разности гравитационных потенциалов и разности ортометрических высот наземных точек 1 и 2 рассмотрим схему измерений на основе использования мобильных атомных часов, содержащую три этапа.

Этап 1. Взаимная калибровка СЧВ-1 и СЧВ-М в исходной точке 1 по времени ($\tau_1 = \tau_m$) *и по частоте* ($f_1 = f_m$) *и последующее перемещение СЧВ-М в точку 2 маршрута.*

На основе соотношений (43)–(45) релятивистскую разность частот задающих генераторов стационарных базовых часов и часов, находящихся на маршруте, получаем в виде:

$$\frac{f_m - f_1}{f_1} = \frac{\varphi_1 - \varphi_m}{c^2} + \frac{\Omega_0^2}{2c^2}\left[\left(x_1^2 + y_1^2\right) - \left(x_m^2 + y_m^2\right)\right] - \\ -\frac{V^2}{2c^2} - \frac{\Omega_0}{c^2}\left(x_m V_y - y_m V_x\right) + \frac{1}{f_1}\left(\delta f_\Omega^{\approx} + \delta f_\varphi^{\approx}\right), \quad (54)$$

где $\delta f_\Omega^{\approx}, \delta f_\varphi^{\approx}$ — «помеховые» релятивистские смещения частоты вследствие неравномерности вращения Земли и приливных потенциалов Луны и Солнца соответственно (см. предыдущий раздел).

Важно отметить, что входящие в эту формулу потенциал ГПЗ φ_m, текущие координаты мобильных часов x_m, y_m и вектор их скорости $\vec{V} = \left\{V_x V_y V_z\right\}$ являются функциями времени τ_1. По этой причине релятивистский сдвиг частоты задающего генератора мобильных часов является переменным вдоль маршрута их движения.

Соответствующий текущий релятивистский эффект смещения шкалы времени мобильных часов относительно базовых на маршруте определяется из соотношения (52) с учётом формулы (54):

$$\tau_m - \tau_1 = \frac{1}{c^2}\left[\varphi_1 + \frac{1}{2}\Omega_0^2\left(x_1^2 + y_1^2\right)\right]\Delta\tau_1 - \\ -\frac{1}{c^2}\int\limits_{\tau_1^*}^{\tau_1^{**}}\left[\varphi_m + \frac{\Omega_0^2}{2}\left(x_m^2 + y_m^2\right) + \frac{1}{2}V^2\right]d\tau_1 - \frac{2\Omega S_{\nabla\uparrow}}{c^2} + \left(\delta\tau_\Omega^{\approx} + \delta\tau_\varphi^{\approx}\right)_\uparrow, \quad (55)$$

где $\Delta\tau_1 = \tau_1^{**} - \tau_1^*$ — интервал интегрирования по шкале базовых часов от момента τ_1^* до момента τ_1^{**}; последний член определяет эффект Саньяка, причём $S_\nabla = \frac{1}{2}\int\limits_{xy_m}\left(x_m dy_m - y_m dx_m\right)$ — площадь проекции треугольника с вершинами в точках $0, \vec{R}_m, \vec{R}_1$ на плоскость экватора; $\delta\tau_\Omega^{\approx}, \delta\tau_\varphi^{\approx}$ — смещения шкалы времени вследствие неравномерности вращения Земли и приливных потенциалов Луны и Солнца соответственно (см. предыдущий раздел).

Подынтегральное выражение в формуле (55) является функцией базового времени τ_1, поскольку $x_m = x_m(\tau_1)$; $y_m = y_m(\tau_1)$; $\vec{V} = \vec{V}_m(\tau_1)$, а текущий изменяющийся потенциал $\varphi_m = \varphi_m(\tau_1)$ определяется формулой (9).

Задачей первого этапа является обеспечение синхронизации базовых и мобильных часов по времени на всём протяжении маршрута СЧВ-М. Для этого необходимо вычислить правую часть выражения (55) и внести поправку с обратным знаком. Вычисление текущего значения релятивистского сдвига шкалы времени выполняется путём численного интегрирования соотношения (55) на основе текущих данных о координатах и скорости мобильных часов, получаемых от бортовой навигационной аппаратуры потребителей (НАП) GLONASS/GPS.

Для обеспечения непрерывной синхронизации шкалы движущихся часов относительно базовых в шкалу времени мобильных часов непрерывно вводится корректирующая поправка $\Delta\tau_{\uparrow}^{kor}$, которая равна по величине и противоположна по знаку правой части выражения (55):

$$\Delta\tau_{\uparrow}^{kor}=\frac{1}{c^2}\left[\varphi_1+\frac{1}{2}\Omega_0^2\left(x_1^2+y_1^2\right)\right]\Delta\tau_{1\uparrow}-$$
$$-\frac{1}{c^2}\int\limits_{\tau_1^*}^{\tau_1^{**}}\left[\varphi_{m\uparrow}+\frac{\Omega_0^2}{2}\left(x_{m\uparrow}^2+y_{m\uparrow}^2\right)+\frac{1}{2}V_{\uparrow}^2\right]d\tau_{1\uparrow}-\frac{2\Omega S_{\nabla\uparrow}}{c^2}+\left(\delta\tau_{\Omega}^{\approx}+\delta\tau_{\varphi}^{\approx}\right)_{\uparrow}=\Delta\tau_{\uparrow}^{rel}, \tag{56}$$

где значок ($\uparrow$) означает путь «туда» (от точки 1 к точке 2). Рассмотренная поправка в текущую шкалу бортового времени СЧВ-М может вводиться либо непрерывно на маршруте, либо по окончании маршрута в точке 2.

В результате введения поправки имеем:

$$\tau_m=\tau_1+\left(\Delta\tau_{\uparrow}^{rel}-\Delta\tau_{\uparrow}^{kor}\right). \tag{57}$$

При равенстве нулю выражения в скобке получаем: $\tau_m = \tau_1$. Это означает, что шкалы мобильных и базовых часов синхронны и совпадают в конце маршрута в точке 2. Этот способ называется релятивистской синхронизацией [13]. Ожидаемая методическая погрешность метода не превышает 1 пикосекунды, эксперимент на мобильном водородном стандарте подтвердил формулы (56) и (57) [12]. Способ релятивистской синхронизации целесообразно использовать при транспортировании шкалы времени для глобально удалённых СЧВ.

Этап 2. Стационарная стоянка СЧВ-М в точке 2 с неизвестной (искомой) высотой с целью накопления необходимого гравитационного эффекта смещения времени, необходимого для измерения этой высоты.

Отличие частоты бортового задающего генератора СЧВ-М, прибывшего в точку 2 и находящегося там в неподвижном состоянии, от частоты генератора СЧВ-1, находящегося в точке 1, при условии $\vec{V}=0$ следует из формулы (46):

$$\frac{f_{m2}-f_1}{f_1}=\frac{\varphi_1-\varphi_{m2}}{c^2}+\frac{\Omega_0^2}{2c^2}\left[\left(x_1^2+y_1^2\right)-\left(x_{m2}^2+y_{m2}^2\right)\right]+\frac{1}{f_1}\left(\delta f_{\Omega}^{\approx}+\delta f_{\varphi}^{\approx}\right)_2, \tag{58}$$

где индекс 2 обозначает отношение к соответствующей точке маршрута.

Из этой формулы следует возможность измерения разности потенциалов при обеспечении возможности непосредственного сравнения оптических частот f_{m2} и f_1 (см. формулы (4) и (8)). Такая возможность обеспечивается передачей частот непосредственно через атмосферу или по ВОЛС. Способ на основе ВОЛС способен обеспечить глобальность действия такого лазерного нивелира.

Определение шкалы времени СЧВ-М после интервала накопления τ_{obs} следует из формулы (47):

$$\tau_m = \tau_1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_{m2}}{c^2}\tau_{obs} + \delta\tau_{rel\,2}^{cal}, \tag{59}$$

где $\delta\tau_{rel}^{cal} = \delta\tau_{\Omega}^{=} + \delta\tau_{\Omega}^{\approx} + \delta\tau_{\varphi}^{\approx}$ — сумма «помеховых» релятивистских эффектов, вычисляемых на интервале времени накопления τ_{obs} (равного, например, одним суткам), причём $\delta\tau_{\Omega}^{=} = 0,5c^{-2}\Omega_0^2[(x_1^2 + y_1^2) - (x_{m2}^2 + y_{m2}^2)]\tau_{obs}$.

Этап 3. Возвращение СЧВ-М в точку 1 и сравнение его шкалы времени со шкалой СЧВ-1.

Изменение частоты генератора вдоль обратного пути определяется в соответствии с формулой (46), и здесь принципиальных отличий в изменении частоты на прямом и обратном пути нет. По возвращении в исходную точку 1 имеем, как и следовало ожидать, $f_m = f_1$ (по-прежнему СЧВ-М считаем достаточно совершенными и их технические уходы частоты и времени на маршруте пренебрежимо малыми).

По пути обратно релятивистский разностный набег между мобильным и базовым стандартом определяется по аналогии с движением по прямому пути:

$$\Delta\tau_{\downarrow}^{rel} = \frac{1}{c^2}\left[\varphi_1 + \frac{1}{2}\Omega_0^2\left(x_1^2 + y_1^2\right)\right]\Delta\tau_{1\downarrow} -$$
$$-\frac{1}{c^2}\int_{\tau_1^*}^{\tau_1^{**}}\left[\varphi_{m\downarrow} + \frac{\Omega_0^2}{2}\left(x_{m\downarrow}^2 + y_{m\downarrow}^2\right) + \frac{1}{2}V_{\downarrow}^2\right]d\tau_{1\downarrow} - \frac{2\Omega S_{\nabla\downarrow}}{c^2} + \left(\delta\tau_{\Omega}^{\approx} + \delta\tau_{\varphi}^{\approx}\right)_{\downarrow} = \Delta\tau_{\downarrow}^{kor}, \tag{60}$$

где $\Delta\tau_{\downarrow}^{kor}$ — вырабатываемая поправка на основе НАП ГНСС для компенсации релятивистских эффектов на обратном пути. Отличия в результатах интегрирования могут быть обусловлены возможным изменением маршрута и другой скоростью перемещения. При этом, например, может измениться величина задержки вследствие эффекта Саньяка.

В результате из исходного соотношения (51) после введения поправки в шкалу мобильных часов по аналогии с (49) получаем:

$$\tau_m = \tau_1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_{m2}}{c^2}\tau_{obs} + \delta\tau_{rel\,2}^{cal} + \left(\Delta\tau_{\downarrow}^{rel} - \Delta\tau_{\downarrow}^{kor}\right). \tag{61}$$

Измеряемая разность показаний шкал времени возвратившегося СЧВ-М и базового СЧВ-1 при условии $(\Delta\tau_{\downarrow}^{rel} = \Delta\tau_{\downarrow}^{kor})$ даёт следующий результат:

$$\Delta\tau_1^{ms} = (\tau_m - \tau_1)_1^{ms} = \tau_1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_{m2}}{c^2}\tau_{obs} + \delta\tau_{rel\,2}^{cal} - \tau_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_{m2}}{c^2}\tau_{obs} + \delta\tau_{rel\,2}^{cal}, \quad (62)$$

что совпадает с формулой (5) для стационарных СЧВ. Отсюда по формуле (7) находится искомая высота.

Таким образом, использование сверхстабильных мобильных оптических СЧВ, метода прямого сличения частот, а также метода релятивистской синхронизации на основе НАП ГНСС позволяет измерить разность потенциалов разнесённых наземных точек с высокой точностью. При относительной нестабильности хранителя шкалы времени 10^{-17} ожидаемая погрешность измерения разности ортометрических высот составляет около 9 см, причём эта погрешность в первом приближении не зависит от расстояния.

Технической проблемой, сдерживающей высокоточное измерение гравитационных эффектов замедления времени, пока является отсутствие в настоящее время мобильных оптических хранителей шкал времени с необходимыми характеристиками.

4. Методы частотно-фазовых измерений параметров ГПЗ на основе стационарных атомных часов, соединённых ВОЛС

4.1. Основные условия распространения световой волны в измерительных волоконно-оптических линиях

Современные волоконно-оптические линии связи (ВОЛС) имеют протяжённость в сотни и тысячи километров. Они могут использоваться для высокоточного измерения параметров лазерного излучения в системах синхронизации разнесённых стандартов частоты и времени квантового нивелира.

Преломляющие свойства материала одномодового оптического волокна определим в виде:

$$n_{\odot}(R,t) = n_0(R,t) + \frac{\partial n(R,t)}{\partial\omega}\Delta\omega, \quad (63)$$

где $n_0(R,\ t)$ — среднее значение коэффициента преломления волокна; $\frac{\partial n}{\partial\omega}(R,t)$ — коэффициент дисперсии материала волокна; $\Delta\omega$ — отклонение оптической частоты от средней. Преломляющие свойства волокна изменяются по длине волокна и во времени t из-за температурных, переменных механических и других воздействий.

Будем считать, что материал волокна в общем случае обладает неодинаковыми преломляющими свойствами для встречных волн (невзаимностью): $n_{\uparrow}; n_{\downarrow}$. Здесь и далее значки $\uparrow, \downarrow$ обозначают распространение волны в ВОЛС от базового СЧВ-1 к СЧВ-2, соответственно, «туда» и «обратно».

Для определения релятивистских параметров распространения в глобальных ВОЛС наилучшим образом подходит релятивистский аппарат распространения электромагнитных волн в земной вращающейся системе отсчёта ITRS, развитый в работах [13, 27, 28].

В качестве координатного времени используем геоцентрическое координатное время $t_{TCG} = t$. *Релятивистский коэффициент преобразования шкалы собственного (измеряемого) времени* относительно шкалы координатного времени для i-х (i = 1; 2) покоящихся в гравитационном поле наземных измерительных часов СЧВ-1 и СЧВ-2 определим из формулы (53) при $V = 0$:

$$\theta_i = 1 - \frac{\Phi_i}{c^2}, \qquad (64)$$

где $\Phi_i = \varphi_{ei} + \delta\varphi_{Mi} + \delta\varphi_{Si} + 0{,}5\vec{G}_i^2$ — статический гравитационный потенциал в точке размещения часов, включающий, соответственно, потенциал поля Земли φ_e (9); $\delta\varphi_{Mi}$, $\delta\varphi_{Si}$ — приливные потенциалы Луны и Солнца (32); $\vec{G}_i = c^{-1}[\vec{\Omega}\vec{R}_i]$ — векторный потенциал в точке размещения измерительных часов.

Во вращающейся системе, как известно, возникает наведённое вращением гравитационное поле, обладающее всеми свойствами оптически плотной среды и соответствующим коэффициентом преломления. Если же в гравитационном поле присутствует оптически плотная среда, в данном случае прозрачная среда волокна, то оптические преломляющие свойства объединяются. *Обобщённый коэффициент преломления волокна* в гравитационном поле Земли в системе ITRS в этом случае имеет вид [13, 27]:

$$\vec{n}^{**} = n_{\odot}\left\{1 + \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{[\vec{\Omega}\vec{R}]^2}{2c^2} + \frac{1}{2c^2}\left([\vec{\Omega}\vec{R}]\vec{e}\right)^2\right\}\vec{e} + \frac{1}{c}[\vec{\Omega}\vec{R}]. \qquad (65)$$

Здесь важно отметить, что первое слагаемое определяется одновременно и свойствами волокна, и свойствами статического гравитационного поля, вторая часть определяется только параметрами вращения Земли, а от свойств волокна не зависит. Это открывает большие возможности измерения параметров вращения Земли с помощью глобальных ВОЛС.

Ещё одним показателем, характеризующим параметры распространения электромагнитного излучения в гравитационном поле системы ITRS, является *коэффициент гравитационного преобразования частоты F*.

Если две волны распространяются в оптическом волокне между двумя точками 1 и 2 навстречу друг другу (например, в задаче взаимной синхронизации двух СЧВ), то выражение для этого коэффициента удобно представить в виде двух связанных между собой коэффициентов преобразования, определяющих преобразование частоты при распространении в направлении от точки 1 к точке 2 ($F_{\uparrow}$) и обратно от точки 2 к точке 1 ($F_{\downarrow}$):

$$F_{\uparrow} = 1 + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{c^2} = \frac{1}{F_{\downarrow}}; \quad F_{\downarrow} = 1 - \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{c^2}. \qquad (66)$$

Учитывая соотношение (64), это выражение получим в развёрнутом виде:

$$F_{\uparrow} = 1 + \frac{\varphi_{e2} - \varphi_{e1}}{c^2} + \frac{\Delta\varphi_{M_{12}}}{c^2} + \frac{\Delta\varphi_{S_{12}}}{c^2} + \frac{1}{2c^2}\left(\left[\vec{\Omega}\vec{R}_2\right]^2 - \left[\vec{\Omega}\vec{R}_1\right]^2\right), \qquad (67)$$

где $\Delta\varphi_M = \delta\varphi_{M2} - \delta\varphi_{M1}$; $\Delta\varphi_S = \delta\varphi_{S2} - \delta\varphi_{S1}$.

Из этих соотношений следует, что если для прямой волны в оптическом волокне $F_{\uparrow} > 1$, то для обратной волны, распространяющейся по тому же волокну, $F_{\downarrow} < 1$.

Важно отметить, что рассмотренный *коэффициент гравитационного преобразования частоты* не зависит от преломляющих свойств материала оптического волокна. Он определяется только разностью гравитационных потенциалов на концах трассы распространения. В зависимости от направления оптического луча он может быть больше или меньше единицы.

4.2. Релятивистские параметры лазерной волны в односторонней оптической волоконной линии

4.2.1. Время распространения

Координатное время распространения волны между моментом излучения t_1 из точки излучения 1 с радиус-вектором $\vec{R}_1$ и моментом её приёма t_2 в точке 2 с радиус-вектором $\vec{R}_2$ определим как интеграл вдоль трассы распространения:

$$t_{\uparrow} = \frac{1}{c}\int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{n}^{**} d\vec{R} \qquad (68)$$

где $\vec{e}$ — орт радиолуча; n^{**} — обобщённый коэффициент, определяемый формулой (55).

Соответствующие промежутки собственного времени $\tau_{\uparrow}, \tau_{\downarrow}$, измеряемые часами, размещёнными в точке 2 и 1 соответственно, определяются с помощью релятивистского коэффициента преобразования θ_i (64):

$$\tau_{\uparrow} = \theta_2 t_{\uparrow}; \qquad \tau_{\downarrow} = \theta_1 t_{\downarrow}. \qquad (69)$$

Используя выражение (65) и пренебрегая членами порядка c^{-4}, выражение для собственного времени распространения «туда» получаем в виде:

$$\tau_{\uparrow} = \frac{\theta_2 L_{\uparrow}}{c} + \tau_{\uparrow}^{\Delta n} + \tau_{GR} + \tau_{\Omega^2} + \tau_{\uparrow}^{\Omega}, \qquad (70)$$

где $L_{\uparrow} = \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{e}_{\uparrow} d\vec{R}$ — геометрическая длина трассы распространения в волокне;

$$\tau_{\uparrow}^{\Delta n} = \frac{\theta_2}{c}\int_{R_1}^{R_2}\left[n_{0\uparrow} + \frac{\partial n_{\uparrow}}{\partial\omega}\Delta\omega - 1\right]dR \tag{71}$$

— задержка на всей длине волокна, вызванная только его преломляющими свойствами и дисперсией;

$$\tau_{GR} = \frac{2n_{\odot}}{c^3}\int_{R_C}^{R_E}\left(\frac{\mu_e}{\rho} + \delta\varphi_M + \delta\varphi_S\right)dR \tag{72}$$

— гравитационная задержка в поле Земли, Луны и Солнца. Важно отметить, что при распространении по волокну она зависит от его преломляющих свойств, но не зависит от направления распространения;

$$\tau_{\Omega^2} = \frac{n_{\odot}}{2c^3}\int_{R_1}^{R_2}\left\{\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]^2 + \left(\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]\vec{e}_{\uparrow}\right)^2\right\}dR \tag{73}$$

— задержка в поле центробежных сил, не зависящая, как следует из этой формулы, от направления распространения;

$$\tau_{\uparrow}^{\Omega} = \frac{\theta_2}{c}\int_{R_1}^{R_2}\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]_{\uparrow}d\vec{R}. \tag{74}$$

— гироскопическая задержка (эффект Саньяка), знак которой зависит от направления распространения по поверхности Земли.

Собственное время распространения в направлении «обратно» определяется аналогично, формально только изменяется направление стрелок:

$$\tau_{\downarrow} = \frac{\theta_1 L_{\downarrow}}{c} + \tau_{\downarrow}^{\Delta n} + \tau_{GR} + \tau_{\Omega^2} + \tau_{\downarrow}^{\Omega}, \tag{75}$$

где слагаемые определяются формулами (71)–(74), но для обратной волны.

Отсутствие стрелок у некоторых слагаемых означает их независимость от направления волны.

4.2.2. Частота оптической волны

Собственную частоту излучения на приёмном конце 2 световода при распространении «туда» определим из соотношения [13]:

$$\omega_{2\uparrow} = F_{\uparrow}\omega_1 \frac{1}{1 + \dfrac{\theta_2}{c}\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}\left[\Delta\dot{n}_{0\uparrow} + \frac{\partial\dot{n}_{\uparrow}}{\partial\omega}\Delta\omega\right]dR}, \tag{76}$$

где ω_1 — частота излучаемого сигнала; $\Delta n_0 = n_0 - 1$, $\Delta\dot{n}_0$, $\dfrac{\partial\dot{n}}{\partial\omega}$ — производные преломляющих свойств волокна по времени; $F_{\uparrow}$ — коэффициент гравитационного преобразования частоты, определяемый соотношением (67). На основе соотношения (67) выражение (75) получаем в развёрнутом виде:

$$\omega_{2\uparrow} = \omega_1 \frac{1 - \frac{\varphi_{e1} - \varphi_{e2}}{c^2} - \frac{\Delta\varphi_{M_{12}}}{c^2} - \frac{\Delta\varphi_{S_{12}}}{c^2} - \frac{1}{2c^2}\left(\left[\overrightarrow{\Omega}\overrightarrow{R_1}\right]^2 - \left[\overrightarrow{\Omega}\overrightarrow{R_2}\right]^2\right)}{1 + \frac{\theta_2}{c}\int\limits_{R_1}^{R_2}\left[\Delta\dot{n}_{0\uparrow} + \frac{\partial\dot{n}_\uparrow}{\partial\omega}\Delta\omega\right]dR}. \quad (77)$$

Отсюда следует, что частота принимаемого сигнала определяется не только разностью гравитационных потенциалов между точками приёма и излучения, а также скоростью изменения преломляющих свойств волокна во времени.

Из соотношения (76) определяется частота принимаемого сигнала в точке 1 для обратного луча:

$$\omega_{1\downarrow} = F_\downarrow \omega_2 \left[1 + \frac{\theta_1}{c}\int\limits_{R_2}^{R_1}\left(\Delta\dot{n}_{0\downarrow} + \frac{\partial\dot{n}_\downarrow}{\partial\omega}\Delta\omega\right)dR\right], \quad (78)$$

где $F_\downarrow$ определяется формулой (67).

4.2.3. Фаза оптической волны

Приращение фазы волны найдём из общего соотношения:

$$d\Phi = \omega_k dt - \vec{k}d\vec{R}, \quad (79)$$

где ω_k — координатная частота, не зависящая от характеристик гравитационного поля, а потому постоянная вдоль трассы; $\vec{k}$ — волновой вектор, определяемый коэффициентом преломления гравитационной среды $\vec{n}^{**}$ (65):

$$\vec{k} = \frac{\omega_k}{c}\vec{n}^{**}. \quad (80)$$

Переходя с помощью коэффициента (64) к собственной частоте приёмника ω_2 и его собственному времени τ_2, приращение фазы получим в виде:

$$d\Phi = \omega_2 d\tau_2 - \frac{\omega_2\theta_2}{c}\vec{n}^{**}\overrightarrow{dR}. \quad (81)$$

Принимаемое колебание гетеродинирует с опорным колебанием приёмника, и в результате приращение фазы разностного колебания на трассе определяется по формуле:

$$d\Phi_{12} = -\frac{\omega_2\theta_2}{c}\vec{n}^{**}\overrightarrow{dR}. \quad (82)$$

Полный фазовый набег на трассе волны составит:

$$\Delta\Phi_{12} = -\frac{\omega_2\theta_2}{c}\int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2}\vec{n}^{**}\overrightarrow{dR} = \omega_2\tau_\uparrow. \quad (83)$$

Подставляя в эту формулу выражение (70), получаем:

$$\Delta\Phi_\uparrow = -\omega_2\left\{\frac{\theta_2 L_\uparrow}{c} + \tau_\uparrow^{\Delta n} + \tau_{GR} + \tau_{\Omega^2} + \tau_\uparrow^{\Omega}\right\}. \quad (84)$$

Параметры фазовой задержки волны в направлении «обратно» определяются аналогично:

$$\Delta\Phi_{\downarrow} = -\omega_1 \left\{ \frac{\theta_1 L_{\downarrow}}{c} + \tau_{\downarrow}^{\Delta n} + \tau_{GR} + \tau_{\Omega^2} + \tau_{\downarrow}^{\Omega} \right\}. \tag{85}$$

В двух последних формулах члены без стрелок $\uparrow$, $\downarrow$ не зависят от направления распространения.

4.3. Релятивистские параметры лазерной волны в запросной оптической волоконной линии

Рассмотрим распространение оптической волны в ВОЛС из точки 1 «туда и обратно» ($\uparrow\downarrow$) с отражением от торца противоположного конца световода и приёмом снова в точке 1. Время задержки прямой и обратной волн в направлении «туда» ($\uparrow$) и «обратно» ($\downarrow$) определится из соотношений (70) и (75) при условии, что измерения будут выполняться в точке 1:

$$\tau_{\uparrow} = \frac{\theta_1 L_{\uparrow}}{c} + \tau_{\uparrow}^{\Delta n} + \tau_{GR} + \tau_{\Omega^2} + \tau_{\uparrow}^{\Omega}; \tag{86}$$

$$\tau_{\downarrow} = \frac{\theta_1 L_{\downarrow}}{c} + \tau_{\downarrow}^{\Delta n} + \tau_{GR} + \tau_{\Omega^2} + \tau_{\downarrow}^{\Omega}. \tag{87}$$

где $L_{\uparrow} = L_{\downarrow} = \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{e}_{\uparrow} d\vec{R}$ — геометрическая длина трассы распространения в волокне;

$$\tau_{\uparrow}^{\Delta n} = \frac{\theta_1}{c}\int_{R_1}^{R_2}\left(n_{0\uparrow} + \frac{\partial n_{\uparrow}}{\partial\omega}\Delta\omega - 1\right)dR; \qquad \tau_{\downarrow}^{\Delta n} = \frac{\theta_1}{c}\int_{R_2}^{R_1}\left(n_{0\downarrow} + \frac{\partial n_{\downarrow}}{\partial\omega}\Delta\omega - 1\right)dR; \tag{88}$$

$$\tau_{GR} = \frac{2n_{\odot}}{c^3}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{\mu_e}{\rho} + \delta\varphi_M + \delta\varphi_S\right)dR_{\uparrow} = \frac{2n_{\odot}}{c^3}\int_{R_2}^{R_1}\left(\frac{\mu_e}{\rho} + \delta\varphi_M + \delta\varphi_S\right)dR_{\downarrow}; \tag{89}$$

$$\tau_{\Omega^2} = \frac{n_{\odot}}{2c^3}\int_{R_1}^{R_2}\left\{\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]^2 + \left(\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]\vec{e}_{\uparrow}\right)^2\right\}dR_{\uparrow} = \frac{n_{\odot}}{2c^3}\int_{R_2}^{R_1}\left\{\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]^2 + \left(\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]\vec{e}_{\downarrow}\right)^2\right\}dR_{\downarrow}; \tag{90}$$

$$\tau_{\uparrow}^{\Omega} = \frac{\theta_1}{c}\int_{R_1}^{R_2}\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]_{\uparrow} d\vec{R}; \qquad \tau_{\downarrow}^{\Omega} = -\frac{\theta_1}{c}\int_{R_2}^{R1}\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]_{\downarrow} d\vec{R} = -\tau_{\uparrow}^{\Omega}. \tag{91}$$

Полное время запаздывания запросной оптической волны определяется суммой задержек (86) и (87):

$$\tau_{\uparrow\downarrow} = \frac{2\theta_1 L_{\uparrow}}{c} + \left(\tau_{\uparrow}^{\Delta n} + \tau_{\downarrow}^{\Delta n}\right) + 2\tau_{GR} + 2\tau_{\Omega^2}, \tag{92}$$

где эффект Саньяка компенсируется.

Частоту принимаемой волны найдём на основе соотношений (76) и (78):

$$\omega_{\uparrow\downarrow} = \omega_1 \frac{1 + \frac{\theta_1}{c} \int\limits_{R_2}^{R_1} \left[\Delta \dot{n}_{0\downarrow} + \frac{\partial \dot{n}_{\downarrow}(R,t)}{\partial \omega} \Delta\omega \right] dR}{1 + \frac{\theta_1}{c} \int\limits_{R_1}^{R_2} \left[\Delta \dot{n}_{0\uparrow} + \frac{\partial \dot{n}_{\uparrow}(R,t)}{\partial \omega} \Delta\omega \right] dR}, \tag{93}$$

откуда следует, что в запросной оптической линии релятивистское смещение частоты полностью компенсируется, однако остаётся влияние невзаимности преломляющих свойств волокна. В глобальных измерительных ВОЛС невзаимность может возникнуть в силу разного времени прохода прямой и обратной волны через участок волокна с переменным коэффициентом преломления.

Фазу волны найдём на основе формулы (92) при условии, что измерение фазового набега ведётся в точке 1 на частоте ω_1:

$$\Delta\Phi_{\uparrow\downarrow} = -\omega_1 \left\{ \frac{2\theta_1 L_{\uparrow}}{c} + \left(\tau_{\uparrow}^{\Delta n} + \tau_{\downarrow}^{\Delta n} \right) + 2\tau_{GR} + 2\tau_{\Omega^2} \right\}. \tag{94}$$

5. Измерение разности потенциалов и высот с помощью квантового нивелира на основе ВОЛС

5.1. Постановка задачи

Условимся, что на противоположных концах протяжённого волоконно-оптического кабеля квантового нивелира размещены два стандарта частоты и времени: эталонный (базовый) СЧВ-1 со шкалой времени τ_1 и ведомый СЧВ-2 со шкалой $\tau_2 = \tau_1 + \Delta\tau_{20}$, где $\Delta\tau_{20}$ — смещение, определяемое соотношением:

$$\Delta\tau_{20} = \Delta\tau_{2T} + \Delta\tau_{rel}^{ms}, \tag{95}$$

где $\Delta\tau_T$ — техническое рассогласование шкал времени, определяемое влиянием технических факторов (начальным рассогласованием частоты задающего генератора, его нестабильностью, температурой, давлением и др.); $\Delta\tau_{rel}^{ms}$ — релятивистское, подлежащее измерению взаимное смещение шкал времени двух стационарных наземных часов, определяемое из (5).

Кроме того, задающий генератор эталонного СЧВ-1 имеет частоту f_1, а ведомый СЧВ-2 — частоту $f_2 = f_1 + \Delta f_{20}$, где по аналогии

$$\Delta f_{20} = \Delta f_{2T} + \Delta f_{rel}^{ms}, \tag{96}$$

где Δf_T — техническое рассогласование частот; Δf_{rel}^{ms} — релятивистское, подлежащее измерению взаимное смещение частот двух задающих генераторов стационарных наземных часов, определяемое из (4).

На основе методов измерений времени и частоты с использованием ВОЛС возможно, как следует их формул (95) и (96), решение двух задач: либо задача синхронизации и сличения частот с компенсацией релятивистских смещений [13], либо измерение релятивистских смещений времени и частоты при известных технических расстройках по частоте и времени.

Наивысшую точность измерений с использованием ВОЛС можно получить на основе дуплексного и запросно-беззапросного методов компенсации задержки и доплеровских смещений на волоконной трассе распространения оптической волны.

5.2 Использование измерений расхождения шкал времени

5.2.1. Дуплексный метод измерений

Дуплексный метод основан на определении разности измерений запаздывания встречных сигналов относительно местных хранителей времени, размещённых на концах оптического волокна. Время запаздывания метки времени, распространяющейся от эталонного СЧВ-1 в направлении «туда» ($\uparrow$), относительно одноименной метки времени ведомого СЧВ-2, измеренное с помощью СЧВ-2, определяется соотношением (70):

$$\tau_{\uparrow 2}^{ms} = \left(\tau_1 + \tau_{\uparrow}\right) - \left(\tau_1 + \Delta\tau_{20}\right) = -\Delta\tau_{20} + \frac{\theta_2 L_{\uparrow}}{c} + \tau_{\uparrow}^{\Delta n} + \tau_{GR} + \tau_{\Omega^2} + \tau_{\uparrow}^{\Omega}, \qquad (97)$$

где составляющие формулы определяются формулами (71)–(74). Случайной погрешностью измерений на этом этапе пренебрегаем.

Аналогично на основе формулы (75) находим запаздывание луча, распространяющегося по направлению «обратно» ($\downarrow$), измеренное относительно шкалы СЧВ-1:

$$\tau_{\downarrow 1}^{ms} = \left(\tau_1 + \Delta\tau_{20} + \tau_{\downarrow}\right) - \tau_1 = \Delta\tau_{20} + \frac{\theta_1 L_{\downarrow}}{c} + \tau_{\downarrow}^{\Delta n} + \tau_{GR} + \tau_{\Omega^2} - \tau_{\downarrow}^{\Omega}, \qquad (98)$$

где слагаемые определяются формулами (88)–(91).

Разность результатов измерений (98) и (97) несёт информацию о рассогласовании шкал:

$$\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{ms} = \tau_{\downarrow 1}^{ms} - \tau_{\uparrow 2}^{ms} = 2\Delta\tau_{20} + \frac{L_{\uparrow}}{c}\left(\theta_1 - \theta_2\right) - 2\tau_{\uparrow}^{\Omega} + \left(\tau_{\downarrow}^{\Delta n} - \tau_{\uparrow}^{\Delta n}\right), \qquad (99)$$

откуда на основе (95) получаем окончательно искомый результат:

$$\Delta\tau_{rel}^{ms} = \frac{1}{2}\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{ms} - \Delta\tau_{2T} + \frac{L_{\uparrow}}{2c}\left(\theta_2 - \theta_1\right) + \frac{1}{2}\left(\tau_{\uparrow}^{\Delta n} - \tau_{\downarrow}^{\Delta n}\right) + \tau_{\uparrow}^{\Omega}, \qquad (100)$$

где θ_1, θ_2 определяются соотношениями (64).

Полученная формула описывает релятивистские условия распространения в двух разных оптических волокнах с учётом членов, пропорциональных $1/c^3$. Если ими пренебречь, а также принять, что встречные световые лучи в одном оптическом волокне имеют одинаковые условия распространения, полученная формула существенно упрощается:

$$\Delta\tau_{rel}^{ms} = \frac{1}{2}\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{ms} - \Delta\tau_{2T} + \frac{2\Omega S_{\nabla}}{c^2}, \tag{101}$$

где S_{∇} — проекция на плоскость экватора площади фигуры, ограниченной радиус-векторами обоих СЧВ и ВОЛС.

На основе результатов измерений $\Delta\tau_{rel}^{ms}$ (100) по формулам (7) определяются ортометрическая высота СЧВ-2 и разность высот СЧВ-1 и СЧВ-2. Сложность обеспечения высокой точности определения высот заключается в трудности высокоточного определения составляющих правой части соотношения (100).

Возможным решением является рассмотренный в подразделе 3.1 метод выполнения измерений на некотором интервале наблюдения τ_{obs}, например суточном. Полагая, что на этом интервале условия измерения и распространения волн не изменяются, результаты измерений для момента начала и конца интервала согласно (100) составят, соответственно:

$$(\Delta\tau_{rel}^{ms})_0 = \frac{1}{2}\Delta\tau_{\uparrow\downarrow_0}^{ms} - \Delta\tau_{2T_0} + \frac{L_{\uparrow}}{2c}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2}\left(\tau_{\uparrow}^{\Delta n} - \tau_{\downarrow}^{\Delta n}\right) + \tau_{\uparrow}^{\Omega}; \tag{102}$$

$$(\Delta\tau_{rel}^{ms})_{obs} = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{ms})_{obs} - (\Delta\tau_{2T})_{obs} + \frac{L_{\uparrow}}{2c}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2}\left(\tau_{\uparrow}^{\Delta n} - \tau_{\downarrow}^{\Delta n}\right) + \tau_{\uparrow}^{\Omega}, \tag{103}$$

откуда следует:

$$(\Delta\tau_{rel}^{ms})_{obs} - (\Delta\tau_{rel}^{ms})_0 = \frac{1}{2}\left[(\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{ms})_{obs} - (\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{ms})_0\right] - \left[(\Delta\tau_{2T})_{obs} - (\Delta\tau_{2T})_0\right], \tag{104}$$

где $(\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{ms})_0$, $(\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{ms})_{obs}$ — результаты измерений в дуплексной линии на момент начала и конца интервала наблюдения, определяемые формулой (99); $(\Delta\tau_{2T})_{obs} - (\Delta\tau_{2T})_0$ — технический набег шкалы времени СЧВ-2 на интервале τ_{obs}, который легко прогнозируется.

Далее, используя результаты вычислений (104), из формул (48) и (49) находим искомую ортометрическую высоту СЧВ-2.

Для технически совершенного СЧВ, для которого технические уходы шкалы времени пренебрежимо малы, т.е. $\left[(\Delta\tau_{2T})_{obs} - (\Delta\tau_{2T})_0\right] \ll \Delta\tau_{rel}^{ms}$, формула (49) для вычисление ортометрической высоты для рассматриваемого случая принимает вид:

$$H_2^{ort} = \frac{g_1}{g_2}H_1^{ort} + \frac{c^2}{g_2\tau_{obs}}\left\{\frac{1}{2}\left[(\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{ms})_{obs} - (\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{ms})_0\right] - \delta\tau_{obs}^{cal}\right\}. \tag{105}$$

В случае выполнения мониторинга разности потенциалов измерения выполняются непрерывного через интервал τ_{obs}. В этом случае формула мониторинга (50) преобразуется к виду:

$$\frac{(\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{ms})_{obs^i} - (\Delta\tau_{\uparrow\downarrow}^{ms})_{obs^{i-1}}}{2\tau_{obs^i}} = \frac{\Delta\varphi_i}{c^2} + \frac{\delta\tau_{obs^i}^{cal} - \delta\tau_{obs^{i-1}}^{cal}}{\tau_{obs^i}}. \tag{106}$$

Достигнутая на сегодняшний день инструментальная погрешность измерений запаздывания импульсных оптических сигналов, передаваемых по волоконно-оптическим линиям синхронизации, составляет 10–20 пикосекунд [29, 30].

5.2.2. Запросно-беззапросный метод измерений

В этом методе измерений используются две оптические волны: односторонняя СЧВ-2-СЧВ-1($\downarrow$) и двусторонняя (запросная $\uparrow\downarrow$), посылаемая и принимаемая на базовом СЧВ-1.

Измеряемое время задержки метки времени, посылаемой по односторонней линии от СЧВ-2, относительно одноименной метки времени СЧВ-1 определяется формулой (98). Время задержки метки времени в запросной линии с отражением запросного сигнала от противоположного торца световода определяется формулой (92).

Из этих формул находим выражение для искомого рассогласования шкал времени:

$$\Delta\tau_{12}^{ms} = 2\tau_{\downarrow}^{ms} - \tau_{\uparrow\downarrow}^{ms} = 2\Delta\tau_{2T} + 2\Delta\tau_{rel}^{ms} + \left(\tau_{\downarrow}^{\Delta n} - \tau_{\uparrow}^{\Delta n}\right) - 2\tau_{\uparrow}^{\Omega}, \tag{107}$$

откуда получаем выражение для определения релятивистского смещения $\Delta\tau_{rel}^{ms}$.

Как и в предыдущем случае, результаты измерений на интервале наблюдений τ_{obs} определятся формулами:

$$\begin{gathered}
(\Delta\tau_{12}^{ms})_0 = (2\tau_{\downarrow}^{ms} - \tau_{\uparrow\downarrow}^{ms})_0 = 2\Delta\tau_{2T_0} + (2\Delta\tau_{rel}^{ms})_0 + \left(\tau_{\downarrow}^{\Delta n} - \tau_{\uparrow}^{\Delta n}\right)_0 - 2\tau_{\uparrow 0}^{\Omega}; \\
(\Delta\tau_{12}^{ms})_{obs} = (2\tau_{\downarrow}^{ms} - \tau_{\uparrow\downarrow}^{ms})_{obs} = 2\Delta\tau_{2T_{obs}} + (2\Delta\tau_{rel}^{ms})_{obs} + \left(\tau_{\downarrow}^{\Delta n} - \tau_{\uparrow}^{\Delta n}\right)_{obs} - 2\tau_{\uparrow obs}^{\Omega}.
\end{gathered} \tag{108}$$

Отсюда при постоянстве условий распространения и постоянном значении $\Delta\tau_{2T}$ получаем:

$$(\Delta\tau_{rel}^{ms})_{obs} - (\Delta\tau_{rel}^{ms})_0 = \frac{1}{2}\Big[(\Delta\tau_{12}^{ms})_{obs} - (\Delta\tau_{12}^{ms})_0\Big]. \tag{109}$$

Соответственно, формула для определения высоты (49) и формула мониторинга (106) для запросно-беззапросного метода принимают вид:

$$\begin{gathered}
H_2^{ort} = \frac{g_1}{g_2} H_1^{ort} + \frac{c^2}{g_2\tau_{obs}}\left\{\frac{1}{2}\Big[(\Delta\tau_{12}^{ms})_{obs} - (\Delta\tau_{12}^{ms})_0\Big] - \delta\tau_{obs}^{cal}\right\}; \\
\frac{(\Delta\tau_{12}^{ms})_{obs^i} - (\Delta\tau_{12}^{ms})_{obs^{i-1}}}{2\tau_{obs^i}} = \frac{\Delta\varphi_i}{c^2} + \frac{\delta\tau_{obs^i}^{cal} - \delta\tau_{obs^{i-1}}^{cal}}{\tau_{obs^i}}.
\end{gathered} \tag{110}$$

5.3. Использование частотных измерений в ВОЛС

5.3.1. Дуплексный метод измерений

Частоту световой волны, передаваемой по световоду от излучателя СЧВ-1, в точке приёма на СЧВ-2 определим в соответствии с формулой (76):

$$f_{2\uparrow} = F_\uparrow f_1 \frac{1}{1+\dot{K}_{\uparrow 1}}, \tag{111}$$

где коэффициент $F_\uparrow$ определяется формулой (67); $\Delta\dot{n}_{0\uparrow}, \dfrac{\partial \dot{n}_\uparrow}{\partial\omega}$ — скорости изменения во времени характеристик волокна, по которому распространяется луч $\uparrow$.

Коэффициент преобразования частоты за счёт изменения преломляющих свойств первого световода:

$$\dot{K}_{\uparrow 1} = \frac{\theta_2}{c}\int_{R_1}^{R_2}\left[\Delta\dot{n}_{0\uparrow} + \frac{\partial\dot{n}_\uparrow(R,t)}{\partial\omega}\Delta\omega\right]_1 \vec{e}_\uparrow d\vec{R}. \tag{112}$$

В точке 2 выделяется и измеряется разностная частота:

$$f_2^{ms} = f_2 - f_{2\uparrow} = \Delta f_{20} + f_1\left(1 - \frac{F_\uparrow}{1+\dot{K}_{\uparrow 1}}\right). \tag{113}$$

На основании формулы (78) находим выражение для частоты обратной волны, распространяющейся во втором световоде и принимаемой в точке 1:

$$\begin{gathered} f_{1\downarrow} = F_\downarrow\left(f_1 + \Delta f_{20}\right)\left[1 + \frac{\theta_1}{c}\int_{R_2}^{R_1}\left(\Delta\dot{n}_{0\downarrow} + \frac{\partial\dot{n}_\downarrow}{\partial\omega}\Delta\omega\right)\vec{e}_\downarrow dR\right] \approx \\ \approx \Delta f_{20} + F_\downarrow f\left[1 - \frac{\theta_1}{c}\int_{R_2}^{R_1}\left(\Delta\dot{n}_{0\downarrow} + \frac{\partial\dot{n}_\downarrow}{\partial\omega}\Delta\omega\right)\vec{e}_\uparrow dR\right] \approx \Delta f_{20} + F_\downarrow f_1\left(1 - \dot{K}_{2\downarrow}\right), \end{gathered} \tag{114}$$

где учтено, что $\vec{e}_\downarrow = -\vec{e}_\uparrow$;

$$\dot{K}_{2\downarrow} = \frac{\theta_1}{c}\int_{R_2}^{R_1}\left(\Delta\dot{n}_{0\downarrow} + \frac{\partial\dot{n}_\downarrow}{\partial\omega}\Delta\omega\right)\vec{e}_\uparrow d\vec{R}. \tag{115}$$

Разность частот, измеряемая в точке размещения СЧВ-1, составит:

$$\Delta f_1^{ms} = f_1 - f_{1\downarrow} = f_0\left(1 - \frac{1-\dot{K}_{2\downarrow}}{F_\uparrow}\right) - \Delta f_{20}. \tag{116}$$

На основе результатов измерений, определяемых формулами (113) и (116), получаем выражение, содержащее искомое расхождение собственных частот двух разнесённых СЧВ:

$$\frac{f_2^{ms} - f_1^{ms}}{2f_1} = \frac{\Delta f_{20}}{f_1} - \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{c^2} + \frac{1}{2}\left(\dot{K}_{\uparrow 1} - \dot{K}_{\downarrow 2}\right), \tag{117}$$

где интегральный потенциал Φ_i определяется в виде (64).

Если оба встречных луча распространяются по одному волокну, то $\dot{K}_{\uparrow 1} =$ $= \dot{K}_{\downarrow 2}$. Кроме того, учитывая выражение (96), результирующую формулу для определения расхождения собственных частот двух СЧВ квантового нивелира получаем в виде:

$$\frac{1}{2}\frac{f_2^{ms}-f_1^{ms}}{f_1}=\frac{\Delta f_{2T}}{f_1}+\frac{\Delta f_{rel}^{ms}}{f_1}-\frac{\Phi_2-\Phi_1}{c^2}. \tag{118}$$

Наконец, учитывая соотношения (4) и (64), эту формулу приводим к окончательному развёрнутому виду:

$$\frac{f_2^{ms}-f_1^{ms}}{f_1}=\frac{2\Delta f_{2T}}{f_1}+\frac{2\Delta f_{rel}^{ms}}{f_1}+\frac{2(\Phi_1-\Phi_2)}{c^2}=\frac{2\Delta f_{2T}}{f_1}+\frac{4(\varphi_{e1}-\varphi_{e2})}{c^2}+\frac{4\delta f_{rel}^{cal}}{f_1}, \tag{119}$$

где, согласно соотношению (6), $\delta f_{rel}^{cal}=\delta f_{\Omega}^{=}+\delta f_{\Omega}^{\approx}+\delta f_{\varphi}^{\approx}$ — вычисляемые «помеховые» составляющие релятивистского частотного смещения (постоянная и слабопеременная составляющие влияния вращения Земли, а также приливные смещения).

Отсюда следует рабочая формула, аналогичная (6):

$$\frac{f_2^{ms}-f_1^{ms}}{f_1}=4\frac{\varphi_{e1}-\varphi_{e2}}{c^2}+4\left(\frac{\delta f_{rel}^{cal}}{f_1}+\frac{\Delta f_{2T}}{2f_1}\right). \tag{120}$$

Таким образом, релятивистская разность частот двух разнесённых СЧВ, измеряемая дуплексным методом с помощью одного и того же световода, определяется учетверённой разностью потенциалов интегрального гравитационного поля в системе ITRS.

При этом гравитационный эффект смещения частоты СЧВ при перемещении его в гравитационном поле из точки с нулевой высотой (точка СЧВ-1) на высоту с меньшим потенциалом (в точку СЧВ-2), а также гравитационный эффект смещения частоты оптического луча в волокне при его «падении» с этой высоты в исходную точку *складываются.*

Искомая высота и разность высот, согласно формулам (8), определятся из соотношений:

$$H_2^{ort}=\frac{\bar{g}_1}{\bar{g}_2}H_1^{ort}+\frac{c^2}{\bar{g}_2 f_1}\left[0,25\left(f_2^{ms}-f_1^{ms}\right)-\left(\delta f_{rel}^{cal}+0,5\Delta f_{2T}\right)\right]; \tag{121}$$

$$\Delta H_{21}^{ort}=H_1^{ort}\left(\frac{\bar{g}_1}{\bar{g}_2}-1\right)+\frac{c^2}{\bar{g}_2 f_1}\left[0,25\left(f_2^{ms}-f_1^{ms}\right)-\left(\delta f_{rel}^{cal}+0,5\Delta f_{2T}\right)\right]. \tag{122}$$

Для непрерывного мониторинга разности гравитационных потенциалов необходимы СЧВ, технические уходы частот которых пренебрежимо малы. Поэтому для решения этой задачи целесообразно воспользоваться формулой (120), которую при заданном условии представим в виде:

$$\frac{\delta f_{rel}^{ms}(t)}{f_1}-4\frac{\delta f_{rel}^{cal}(t)}{f_1}=4\frac{\Delta\varphi_e(t)}{c^2}, \tag{123}$$

где $\Delta\varphi_e(t) = \varphi_{e1} - \varphi_{e2}$; $\delta f_{rel}^{ms}(t) = (f_2^{ms} - f_1^{ms})$ — непрерывно измеряемые изменения разности частот и гравитационных потенциалов; $\delta f_{rel}^{cal}(t)$ — составляющие, вычисляемые по априорным данным.

Изменяемая во времени разность гравитационных потенциалов, согласно формуле (6), определяется изменяющимися во времени ускорением свободного падения (УСП) и ортометрическими высотами СЧВ-1 и СЧВ-2 квантового нивелира:

$$\delta\varphi(t) = g_2(t)H_2^{ort}(t) - g_1(t)H_1^{ort}(t). \quad (124)$$

Поэтому мониторинг разности потенциалов должен сопровождаться одновременным мониторингом УСП с помощью гравиметров.

5.3.2. Запросно-беззапросный метод измерений

Для вычисления частотных смещений в запросно-беззапросном методе необходимо воспользоваться формулами (116) (волна в направлении $\downarrow$) и формулой (93) для частоты отражённой волны в запросном канале, измеряемой в точке 1. В результате в точке 1 выделяются и измеряются две разностные частоты:

$$\Delta f_1^{ms} = f_1 - f_{1\downarrow} = f_1\left(1 - \frac{1-\dot{K}_{2\downarrow}}{F_\uparrow}\right) - \Delta f_{20}; \quad (125)$$

$$f_{\uparrow\downarrow}^{ms} = f_1 - f_1\frac{1-\dot{K}_{2\downarrow}}{1+\dot{K}_{1\uparrow}}, \quad (126)$$

где коэффициенты $\dot{K}_{\uparrow 1}, \dot{K}_{\downarrow 2}$ определяются формулами (112) и (115).

Поскольку обе волны распространяются в одном и том же световоде, то можно считать $\dot{K}_\downarrow = \dot{K}_\uparrow$ Поэтому на основе результатов измерений (121) и (122) получаем рабочую формулу для определения частотной расстройки двух СЧВ, правая часть которого полностью идентична формуле (120):

$$\frac{f_{\uparrow\downarrow}^{ms} - 2f_1^{ms}}{f_1} = 4\left(\frac{\varphi_{e1} - \varphi_{e2}}{c^2}\right) + 4\left(\frac{\delta f_{rel}^{cal}}{f_1} + \frac{\Delta f_{2T}}{2f_1}\right). \quad (127)$$

Таким образом, в запросно-беззапросном методе определения расхождения частот двух СЧВ квантового нивелира с помощью ВОЛС получено учетверённое значение релятивистских частотных эффектов, полностью совпадающее с результатами дуплексных измерений (см. выше).

По аналогии с дуплексным методом получаем формулы для определения высоты и разности высот СЧВ нивелира:

$$H_2^{ort} = \frac{\bar{g}_1}{\bar{g}_2}H_1^{ort} + \frac{c^2}{\bar{g}_2 f_1}\left[0{,}25\left(f_{\uparrow\downarrow}^{ms} - 2f_1^{ms}\right) - \left(\delta f_{rel}^{cal} + 0{,}5\Delta f_{2T}\right)\right]; \quad (128)$$

$$\Delta H_{21}^{ort} = H_1^{ort}\left(\frac{\bar{g}_1}{\bar{g}_2} - 1\right) + \frac{c^2}{\bar{g}_2 f_1}\left[0{,}25\left(f_{\uparrow\downarrow}^{ms} - 2f_1^{ms}\right) - \left(\delta f_{rel}^{cal} + 0{,}5\Delta f_{2T}\right)\right]. \quad (129)$$

В качестве формулы мониторинга используем (123), где в данном случае $\delta f_{rel}^{ms}(t) = (f_{\uparrow\downarrow}^{ms} - 2f_1^{ms})$.

6. Измерение уклонения отвесной линии с помощью квантового нивелира

Как известно, угол между направлением нормальной силы тяжести $\vec{\gamma}$, соответствующей поверхности принятого Земного эллипсоида, и направлением действительной силы тяжести $\vec{g}$ на физической поверхности Земли (направлением отвесной линии) называется гравиметрическим уклонением отвесной линии (УОЛ). Для определения составляющих гравиметрического УОЛ примем точку размещения СЧВ-1 квантового нивелира за начало прямоугольной системы координат, ось OZ совместим с направлением нормальной силы тяжести $\vec{\gamma}$, ось OX направим по касательной к меридиану на север, а ось OY — на восток. При этих условиях составляющие УОЛ по соответствующим осям определяются следующими формулами [23]:

$$\xi_{gr} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial x}; \quad \eta_{gr} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial y}, \quad (130)$$

где T — возмущающий гравитационный потенциал, определяемый параметрами аномального ГПЗ.

Переходя к конечным приращениям, эти формулы представим через соответствующие параметры в близко размещённых пространственных точках, в которых размещаются элементы нивелира СЧВ-1 и СЧВ-2:

$$\xi_{gr} = -\frac{1}{\gamma_m}\frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}; \quad \eta_{gr} = -\frac{1}{\gamma_m}\frac{T_2 - T_1}{y_2 - y_1}, \quad (131)$$

где γ_m — среднее значение нормальной силы тяжести, соответствующее середине расстояния между выбранными пространственными точками.

Представляя возмущающий потенциал через реальный потенциал φ и потенциал на поверхности геоида φ_G в виде $T = \varphi - \varphi_G$, последние формулы приводим к виду:

$$\xi_{gr} = -\frac{1}{\gamma_m}\frac{(\varphi_2 - \varphi_1)_x}{x_2 - x_1}; \quad \eta_{gr} = -\frac{1}{\gamma_m}\frac{(\varphi_2 - \varphi_1)_y}{y_2 - y_1}, \quad (132)$$

где в числителях представлена разность гравитационных потенциалов между парами точек, размещёнными вдоль осей OX и OY, соответственно.

Разность потенциалов в каждом типе квантового нивелира, как следует из вышеизложенного, определяется по-разному. Рассмотрим эти особенности.

1. Для квантового нивелира на стационарных СЧВ, связанных любой системой высокоточной синхронизации, разность потенциалов на интервале наблюдения $\Delta\tau_{obs} = 24$ ч следует из формулы (48):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{c^2}{\Delta\tau_{24}}\left[\delta\tau_{24}^{cal} - \left(\Delta\tau_{24}^{ms} - \Delta\tau_0^{ms}\right)\right],$$

откуда в соответствии с (132) получаем:

$$\begin{aligned} \xi_{gr} &= \frac{c^2}{\Delta\tau_{24}\gamma_m \Delta x_{21}}\left[\left(\Delta\tau_{24}^{ms} - \Delta\tau_0^{ms}\right)_x - \left(\delta\tau_{24}^{cal}\right)_x\right]; \\ \eta_{gr} &= \frac{c^2}{\Delta\tau_{24}\gamma_m \Delta y_{21}}\left[\left(\Delta\tau_{24}^{ms} - \Delta\tau_0^{ms}\right)_y - \left(\delta\tau_{24}^{cal}\right)_y\right], \end{aligned} \tag{133}$$

где $\Delta x_{21} = x_2 - x_1$, $\Delta y_{21} = y_2 - y_1$.

2. Для квантового нивелира на мобильных часах разность потенциалов определяется из формулы (54):

$$\varphi_{m2} - \varphi_1 = -\frac{c^2}{\tau_{obs}}\left(\Delta\tau_{rel1}^{ms} - \delta\tau_{rel\,2}^{cal}\right),$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} \xi_{gr} &= \frac{c^2}{\tau_{obs}\gamma_m \Delta x_{21}}\left(\Delta\tau_{rel1}^{ms} - \delta\tau_{rel2}^{cal}\right)_x; \\ \eta_{gr} &= \frac{c^2}{\tau_{obs}\gamma_m \Delta y_{21}}\left(\Delta\tau_{rel1}^{ms} - \delta\tau_{rel2}^{cal}\right)_y. \end{aligned} \tag{134}$$

Рассмотренный квантовый измеритель УОЛ обладает высокой потенциальной точностью. Вместе с тем, в отличие от высокоточных астроизмерителей УОЛ, данный измеритель может работать в любое время суток, в том числе и днём, а также при любом состоянии облачности.

Другой особенностью наземного квантового измерителя УОЛ на основе мобильного СЧВ является возможность выбора нескольких точек измерений вдоль выбранного направления и определения профиля УОЛ.

Наконец, ещё одна особенность такого измерителя состоит в возможности проведения высокоточных измерений УОЛ под землёй (в протяжённых подземных туннелях и шахтных выработках), а также под водой на придонных полигонах.

Заключение

Рассмотренная релятивистская теория может использоваться при обосновании требований к квантовому нивелиру на стационарных и мобильных стандартах частоты и времени, а также при создании глобальных и региональных сетей «Квантовый футшток».

Квантовые нивелиры на основе стационарных и мобильных СЧВ могут использоваться для измерения ортометрических высот и их разностей, для мониторинга изменений разности гравитационных потенциалов во времени, а также для измерения уклонения отвесных линий по разности ортометрических высот.

Наиболее приемлемыми методами синхронизации СЧВ в квантовом нивелире являются метод на основе компенсации релятивистских эффектов с помощью НАП ГНСС («релятивистская синхронизация»), а также метод на основе использования волоконно-оптических линий связи.

«Помеховые» релятивистские смещения частоты и времени сравнительно легко вычисляются по текущему времени и координатам СЧВ, а затем учитываются как поправки к измерениям.

С целью проверки положений теории квантового нивелира целесообразно проведение экспериментов по измерению разности высот с помощью мобильных СЧВ, а также с помощью дуплексных систем синхронизации на основе ВОЛС.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта номер 19-29-11023.

Литература

1. Денисенко О.В., Фатеев В.Ф. Дорожная карта: методы и средства автономной навигации по гравитационному полю / Сборник докладов научно-технической конференции «Навигация по гравитационному полю Земли и её метрологическое обеспечение», 14–15 февраля 2017 г. Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2017. С. 5–16.
2. Angermann D., Gerstl M., Sánchez L., Gruber T., Hugentobler U., Steigenberger P., Heinkelmann R. (2016): GGOS Bureau of Products and Standards: Inventory of standards and conventions for geodesy / Rizos C., Willis P. (eds.) IAG 150 Years. IAG Symposia. 2015. 143. 571–577. 10.1007/1345. 165.
3. Резолюция № 1 Международной ассоциации геодезии «Об определении и реализации международной опорной системе высот» [Электронный ресурс]. Прага, 2015. URL: http://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/IAG-docs/IAG_Resolutions_2015.pdf.
4. Müller J., Dirkx D., Kopeikin S.M. et al. High Performance Clocks and Gravity Field Determination [Electronic resource] // Space Science Reviews. 2018. 214: 5. URL: https://doi.org/10.1007/s11214-017-0431-z.
5. Fateev V.F., Zharikov A.I., Sysoev V.P., Ribakov E.A., Smirnov F.R. Experimental determination of Orthometric Heights Difference Based on Gravitational Effects of Time Dilation / 4th IAG Symposium on Terrestrial Gravimetry: Static and Mobile Measurements, 12–15 April. Saint Petersburg, 2016.

6. Фатеев В.Ф., Сысоев В.П., Рыбаков Е.А. Экспериментальное измерение гравитационного эффекта замедления времени с помощью перевозимых квантовых часов // Измерительная техника. 2016. № 4. С. 41–43; Fateev V.F., Sysoev V.P., Rubakov E.A. Experimental measurement of Gravitational Time Dilation using Transportable Quantum Clocks // Measurement Techniques. 2016. No. 59(4). P. 402–404.
7. Рыбаков Е.А., Фатеев В.Ф., Жариков. А.И., Сысоев В.П., Смирнов Ф.Р. Измерение разности гравитационных потенциалов и ортометрических высот двух разнесённых точек на поверхности Земли / Материалы VIII Международного симпозиума «Метрология времени и пространства», 14–16 сентября 2016 г., Санкт-Петербург. Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016. С. 189–192.
8. Фатеев В.Ф., Жариков А.И., Сысоев В.П., Рыбаков Е.А., Смирнов Ф.Р. Об измерении разности гравитационных потенциалов Земли с помощью перевозимых квантовых часов / Доклады Академии наук. 2017. Т. 472. № 2. С. 206–209; Fateev V.F., Zharikov A.I., Sysoev V.P., Rybakov E.A., Smirnov F.R. Measurement of the difference in the Earths Gravitational Potentials with the help of a Transportable Quantum Clock / Doklady Earth Sciences. 2017. V. 472. No. 1.
9. Бобров Д., Фатеев В., Рыбаков Е., Смирнов Ф. Действующие макеты квантового нивелира и результаты их экспериментальных исследований / 27-я Генеральная Ассамблея Международного союза геодезии и геофизики. Секция «Статическое гравитационное поле и высотная система», Poster G02p-368, 8–18 июля, Монреаль, Канада; Bobrov D., Fateev V., Rybakov E., Smirnov F. The Quantum level Operating maquettes and the results of their experimental studies / 27th International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG) General Assembly. G02-Posters-Static Gravity Field and Height Systems, G02p-368. 8–18 Juli, Montreal, Canada.
10. Фатеев В.Ф., Рыбаков Е.А. Экспериментальные исследования квантового нивелира / Тезисы докладов II НТК «Навигация по гравитационному и магнитному полям Земли. Новые технологии». 29–31 октября 2019 г. Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2019. С. 81.
11. Grotti J., Koller S., Vogt S. et al. Geodesy and metrology with a transportable optical clock // Nature Physics. 2018. May. V. 14. P. 437–441.
12. Фатеев В.Ф., Рыбаков Е.А., Смирнов Ф.Р. Метод релятивистской синхронизации мобильных атомных часов и его экспериментальная проверка // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 10. С. 3–11, 91–94; Fateev V.F., Rybakov E.A., Smirnov F.R. A Method Of Relativistic Synchronization Of Moving Atomic Clocks And Experimental Verification Thereof // Technical Physics Letters. 2017. V. 43. No. 5. C. 456–459.

13. Фатеев В.Ф. Релятивистская метрология околоземного пространства-времени: монография. Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2017. 439 с.
14. Delva P., Denker H., Lion G. Chronometric Geodesy: Methods and Applications / Puetzfeld D., Lämmerzahl C. (eds.) Relativistic Geodesy // Fundamental Theories of Physics. 2019. V. 196. Springer. Cham.
15. Донченко С.И., Денисенко О.В., Фатеев В.Ф., Рыбаков Е.А. Квантовый футшток: проблемы создания и возможности / Доклады научно-технической конференции «Навигация по гравитационному полю Земли и её метрологическое обеспечение». Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2017.
16. Hirt C., Bürki B., Somieski A., Seeber G. Modern Determination of Vertical Deflections Using Digital Zenith Cameras // Journal Of Surveying Engineering © ASCE. February 2010. 136:1–12.
17. Мурзабеков М.М., Фатеев В.Ф., Пругло А.В., Равдин С.С. Метод компенсации погрешности наклона оси телескопа в астроизмерителе уклонения нормали к геоиду // Астрономический журнал. 2018. Т. 95. № 12. С. 912–914.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
19. Меллер К. Теория относительности. 2-е изд. М.: Атомиздат, 1975. 400 с.
20. Фатеев В.Ф., Копейкин С.М., Пасынок С.Л. Влияние неравномерности вращения Земли на релятивистские смещения частоты и времени наземных атомных часов // Измерительная техника. 2015. № 6. С. 41–45; Fateev V.F., Kopeikin S.M., Pasynok S.L. Effect of Irregularities in the Earth’s rotation on relativistic shifts in frequency and Time of Earthbound Atomic Clocks // Measurement Techniques. 2015. September. V. 58. I. 6. P. 647–654.
21. Абалакин В.К., Аксенов Е.П. и др. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1971.
22. Petit G., Luzum B. (eds.). IERS Conventions 2010 // IERS Technical Notes. 2010. No. 36. P. 1–179.
23. Огородова Л.В., Шимбирев Б.П., Юзефович А.П. Гравиметрия. М.: Недра, 1978. 325 с.
24. Мельхиор П. Земные приливы // пер. с англ. под ред. Н.Н. Парийского. М.: Мир, 1968. 482 с.
25. Блинов И.Ю., Наумов А.В., Смирнов Ю.Ф. Результаты калибровки канала дуплексных сравнений шкал времени TWSTFT между ФГУП «ВНИИФТРИ» и PTB / Материалы 7-го Международного симпозиума «Метрология времени и пространства». 17–19 сентября 2014. Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2014. С. 125–126.
26. Скакун И.О., Митрикас В.В. Сравнение шкал времени методом Common View по измерениям НКА ГЛОНАСС с учётом целочисленного свойства фазовых неоднозначностей // Гироскопия и навигация. 2017. Т. 25. № 4(99). С. 95–107.

27. Фатеев В.Ф. Преломляющие свойства гравитационной сферы Земли во вращающихся системах отсчёта // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. Т. 18. № 5. С. 73–82.
28. Фатеев В.Ф. Гравитационные и релятивистские эффекты в односторонней околоземной космической радиолинии // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. Т. 18. № 5. С. 83–93.
29. Колмогоров О.В., Прохоров Д.В., Донченко С.С., Щипунов А.Н. Система встречных сравнений шкал времени // Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., Санкт-Петербург. Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016. С. 222–227.
30. Донченко С.С., Колмогоров. О.В., Прохоров Д.В. Результаты экспериментальных исследований системы одно- и двухсторонних сравнений шкал времени / Метрология времени и пространства. Материалы VIII Международного симпозиума, 14–16 сентября 2016 г., Санкт-Петербург. Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2016. С. 228–230.