УДК 528.2;629.78

МЕТОДЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ НАЗЕМНЫХ И СПУТНИКОВЫХ АТОМНЫХ ЧАСОВ

В.Ф. Фатеев

ФГУП «ВНИИФТРИ», Менделеево, Московская обл.
fateev@vniiftri.ru

Рассмотрены релятивистские смещения времени и частоты спутниковых атомных часов относительно наземных, включающие следующие составляющие: смещение, определяемое переменными орбитальными параметрами спутника, и гравитационным потенциалом в точке размещения наземных стационарных часов; смещение вследствие воздействия неоднородности ГПЗ; смещения, вызванные приливными потенциалами Луны и Солнца, а также смещение, вызванное неравномерностью вращения Земли. Предложены два метода релятивистской синхронизации бортовых и наземных атомных часов, основанных на компенсации рассмотренных смещений частоты и времени.

Relativistic time and frequency offsets for the satellite atomic clocks with regard to the ground ones include the following components: the offset determined by variable orbital parameters of the satellite and by gravitational potential in the point of placing the ground-based stationary clock; the offset is like an impact of the heterogeneous nature of the Earth`s gravitational field; the offset caused by the tidal potential of the Moon and the Sun; and the offset also caused by the irregularity of the Earth`s rotation. Two relativistic synchronization methods for onboard and ground atomic clocks based on compensation of considered time-and-frequency offset are shown.

Ключевые слова: наземные и спутниковые атомные часы, частота и время, гравитационное поле, коэффициент преобразования шкал, формулы, релятивистское смещение, функции Бесселя, эксцентрическая аномалия

1. Исходные соотношения для системы атомных часов «спутник – Земля»

Проблема релятивистской синхронизации наземных и спутниковых часов путем учета релятивистского влияния гравитационного поля Земли и орбитального движения на шкалу времени наземных и спутниковых стандартов частоты и времени рассматривалась в целом ряде работ и обзоров, посвященных космическим навигационным системам, а также системам спутниковой геодезии. При этом учтено влияние эллиптичности орбиты на ход спутниковых часов и предложены методы компенсации этого эффекта [1–3]. В ближайшие годы планируется ряд космических экспериментов по высокоточному измерению релятивистских смещений частоты и времени в космосе как для решения практических задач релятивистской геодезии, так и в интересах дальнейшей проверки выводов теории относительности [4, 5]. Однако компенсация влияния эллиптичности рассмотрена лишь с точностью до единиц наносекунд, а методы устранения влияния неоднородности гравитационного поля Земли, а также гравитационных полей Луны и Солнца рассмотрены лишь в постановочном плане. Пока не учитывались такие факторы, как неравномерность вращения Земли, приливные явления на поверхности Земли, действие активных ускорений на орбиту спутниковых часов и т.д. Вместе с тем, рост стабильности бортовых стандартов частоты, ужесточение требований к точности навигационных и геодезических систем, а также развитие методов релятивистской геодезии требуют дальнейшего повышения точности учета релятивистских эффектов в бортовых спутниковых часах, а также разработки более совершенных методов их компенсации.

Введем в рассмотрение систему наземных и спутниковых высокостабильных атомных часов и определим взаимные релятивистские расхождения их частоты и времени. Наземные часы (опорные, или базовые), которые будем далее отмечать индексом «0», являются хранителями собственной частоты f_0 и собственного (измеряемого) времени τ_O. Спутниковые атомные часы с индексом «С» являются хранителями собственной частоты и собственного бортового времени, соответственно f_C, τ_C. В качестве координатного времени используем рассмотренное выше геоцентрическое координатное время $t_{TCG} = t$.

Строгое описание релятивистских явлений и методов их учета в бортовой шкале спутниковых часов удобно вести в геоцентрической невращающейся небесной системе отсчета ICRS OXYZ, в которой они движутся по кеплеровским орбитам. Наземные часы в этой системе движутся с линейной скоростью, которая определяется угловой скоростью вращения Земли и геоцентрической широтой точки их размещения. Начало системы находится в центре вращающейся Земли, плоскость XOY совмещена с плоскостью экватора, а ось OX направлена в точку весеннего равноденствия. Текущее положение обоих часов в выбранной системе координат характеризуется радиус-векторами, соответственно $\vec{R_0}$ и $\vec{R_C}$, а скорости перемещения − векторами $\vec{V_0}$ и $\vec{V_C}$.

Релятивистские расхождения временных шкал и частот задающих генераторов неподвижных базовых и подвижных спутниковых часов определим из соотношений [6, 7]:

$$\Delta\tau_P = \Delta\tau_c - \Delta\tau_0 = \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \left(\frac{\theta_c}{\theta_0} - 1 \right) d\tau_0 = \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \frac{\Delta f_p}{f_0} d\tau_0, \tag{1}$$

$$\frac{\Delta f_P}{f_0} = \frac{f_c - f_0}{f_0} = \frac{\theta_c}{\theta_0} - 1, \tag{2}$$

где τ_{01}, τ_{02} − моменты начала и окончания интервала интегрирования по шкале τ_0; $\Delta\tau_0 = \tau_{02} - \tau_{01}$; $\theta_0 = \theta_0(\tau_0, \vec{R}_0)$, − коэффициент преобразования шкалы времени подвижных часов «0», определяемый вдоль их пути перемещения [6, 7]; $\theta_c = \theta_c(\tau_0, \vec{R}_c)$ − коэффициент преобразования шкалы подвижных часов «С», который имеет вид:

$$\theta_c = \left\{ \left(\sqrt{-g_{00}^c} - \frac{\overrightarrow{G_c}\overrightarrow{V_c}\theta_0}{c\sqrt{-g_{00}^c}} \right)^2 - \left(\frac{\overrightarrow{V_c}\theta_0}{c} \right)^2 \right\}^{0,5}, \quad (3)$$

где $(\overrightarrow{G}_c)_\alpha = g_{0\alpha}^c$ − компоненты векторного потенциала гравитационного поля $\overrightarrow{G}_c$, определяемые вдоль орбиты спутника; $\overrightarrow{V}_c = (\vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z)_c$ − скорость спутника с составляющими по осям $(V_x, V_y, V_z)_c$, которые в общем случае изменяются вдоль орбиты; g_{00}^c − временной компонент четырехмерного метрического тензора, также изменяющийся вдоль орбиты. Для подвижных базовых часов эти же величины имеют индекс «0».

Для вычисления коэффициентов преобразования шкал необходимо воспользоваться метрическим тензором для невращающейся небесной системы отсчета [7]. На основе компонентов этого тензора, пренебрегая членами вида O(c^{-4}), находим:

$$\theta_0 = 1 - \frac{\varphi_0}{c^2} - \frac{V_0^2}{2c^2}, \quad (4)$$

где

$$\varphi_0 = \varphi_e^0 + \sum_{i=M,S} \delta\varphi_i^0 \quad (5)$$

− статический гравитационный потенциал в точке размещения наземных часов [8]; φ_e^0 − потенциал ГПЗ в точке наземных часов; $\delta\varphi_M^0, \delta\varphi_S^0$ − приливные потенциалы Луны и Солнца в точке размещения наземных часов [8, 9].

Скорость и квадрат скорости наземных часов определяются формулами:

$$\overrightarrow{V}_0 = \left[\overrightarrow{\Omega}_e \overrightarrow{R}_0\right] = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z \qquad V_0^2 = V_{x0}^2 + V_{y0}^2 + V_{z0}^2, \quad (6)$$

$$V_{x0} = \Omega_y z_0 - \Omega_z y_0, \;\; V_{y0} = \Omega_z x_0 - \Omega_x z_0, \;\; V_{z0} = \Omega_x y_0 - \Omega_y x_0, \quad (7)$$

где $\overrightarrow{\Omega}_e$ − угловая скорость движения Земли [7]; $x_0 y_0 z_0$ − текущие координаты наземных часов. Выражения для составляющих линейной скорости через составляющие угловой скорости позволяют вычислить частотные смещения, вызванные неравномерностью вращения Земли.

На основе тех же компонентов метрического тензора [7], пренебрегая членами вида O(c^{-4}), находим коэффициент преобразования шкалы времени спутниковых часов:

$$\theta_c = 1 - \frac{\varphi_c}{c^2} - \frac{V_c^2}{2c^2}, \quad (8)$$

где

$$\varphi_c = \frac{\mu_e}{\rho_c} + \delta\varphi_e^n + \sum_{i=M,S} \delta\varphi_c^i \,, \tag{9}$$

ρ_c − текущая геоцентрическая высота спутника; $\Delta\varphi_c^n$ − составляющие потенциала ГПЗ, вызванные его неоднородностью. В силу малости высших членов разложения потенциала ГПЗ для спутников ограничимся далее рассмотрением только второй и третьей зональных гармоник:

$$\delta\varphi_e^n = -\sum_{n=2}^{3} \frac{\mu_e}{\rho_C} \left(\frac{R_e}{\rho_C}\right)^n J_n P_n(\sin\psi_C) \,, \tag{10}$$

где $J_2 = 1082{,}6 \cdot 10^{-6}$; $J_3 = -2{,}532 \cdot 10^{-6}$, а соответствующие полиномы Лежандра определяются формулами (ψ_C − текущая геоцентрическая широта спутника):

$$P_2(\sin\psi) = 1{,}5\sin^2\psi_C - 0{,}5; \quad P_3(\sin\psi) = 2{,}5\sin^3\psi_c - 1{,}5\sin\psi_c; \tag{11}$$

$$\delta\varphi_c^i = \frac{\mu_i}{2r_i}\left(\frac{\rho_c}{r_i}\right)^2 \left(3\cos^2 z_c^i - 1\right) \tag{12}$$

− приливные потенциалы Луны и Солнца $(i = M; S)$ в точке нахождения спутника с геоцентрической высотой ρ_c; z_i^c − зенитное расстояние рассматриваемого спутника относительно направления на i-е небесное тело; μ_i − гравитационная постоянная i-го небесного тела.

Используя формулы (4)−(12), выражения (1) и (2) для релятивистских смещений времени и частоты спутниковых часов относительно наземных получаем в виде:

$$\Delta\tau_p = \Delta\tau_c - \Delta\tau_0 = \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \frac{\Delta f_p}{f_0} d\tau_0 = \Delta\tau_p^{осн} + \Delta\tau_c^n + \Delta\tau_{MS}^c - \Delta\tau_{MS}^0 - \Delta\tau_0^{\Omega}, \tag{13}$$

$$\frac{\Delta f_p}{f_0} = \frac{f_c - f_0}{f_0} = \frac{1}{f_0}\left(\Delta f_p^{осн} + \Delta f_c^n + \Delta f_{MS}^C - \Delta f_{MS}^0 - \Delta f_0^{\Omega}\right), \tag{14}$$

где

$$\Delta\tau_P^{осн} = \int_{\tau 0} \frac{\Delta f_P^{осн}}{f_0} d\tau_0 = \frac{1}{c^2}\int_{\tau 0}\left(\Phi_0 - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2}\right) d\tau_0 \,, \tag{15}$$

$$\frac{\Delta f_P^{осн}}{f_0} = \frac{1}{c^2}\left(\Phi_0 - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2}\right) \tag{15а}$$

− основные составляющие взаимного релятивистского смещения собственного времени $\Delta\tau_P^{осн}$ и относительного релятивистского смещения частоты $\Delta f_P^{осн} / f_0$ спутниковых и наземных часов, определяемые переменными орбитальными параметрами спутника $\rho_c(\tau_0); V_c(\tau_0)$, а также гравитационным потенциалом в точке размещения наземных стационарных часов Φ_0, который определяется в соответствии с (4) и (5) выражением:

$$\Phi_0 = \varphi_e^0 + \frac{V_0^2}{2} = \varphi_e^0 + \frac{1}{2}\Omega_e^2 \rho_0^2 \cos^2 \psi_0 = const\ , \qquad (16)$$

где $\psi_0; \rho_0$ − соответственно геоцентрическая широта и высота наземных базовых часов; потенциал в наземной точке φ_e^0 определятся при условии $\rho = \rho_0$;

$$\Delta\tau_c^n = \int_{\tau 0} \frac{\Delta f_C^n}{f_0} d\tau_0 = -\int_{\tau 0} \frac{\varphi_c^n}{c^2} d\tau_0 \qquad (17)$$

− смещение шкалы собственного времени часов спутника вследствие воздействия неоднородности ГПЗ с возмущающим потенциалом (10);

$$\Delta\tau_{MS}^0 = \left(\theta_0 - 1\right) dt = \int_{\tau 0} \frac{\Delta f_{MS}^0}{f_0} dt = -\frac{1}{c^2} \int_{\tau 0} \left(\delta\varphi_M^0 + \delta\varphi_S^0\right) dt \qquad (18)$$

− смещение шкалы собственного времени наземных часов, вызванное приливными потенциалами Луны и Солнца; θ_0 − коэффициент преобразования шкалы времени (4), в котором в данном случае используем только приливный потенциал. Поскольку это смещение рассчитывается относительно центра Земли, то оно вычисляется в единицах геоцентрического координатного времени $t_{TCG} = t$;

$$\Delta\tau_{MS}^c = \left(\theta_C - 1\right) dt = \int_{\tau 0} \frac{\Delta f_{MS}^c}{f_0} dt = -\frac{1}{c^2} \int_{\tau 0} \left(\delta\varphi_M^c + \delta\varphi_S^c\right) dt \qquad (19)$$

− приливное смещение шкалы собственного времени спутниковых часов. Это смещение также интегрируется во времени $t_{TCG} = t$; θ_c определяется формулой (8) только с приливным потенциалом;

$$\Delta\tau_0^\Omega = \int_{\tau 0} \frac{\Delta f_0^\Omega}{f_0} d\tau_0 = \int_{\tau 0} \frac{1}{f_0} \sum_{j=1}^{3} \delta f_{0j}^\Omega d\tau_0 \qquad (20)$$

− смещение времени и частоты задающего генератора Δf_0^Ω наземных часов, вызванные неравномерностью вращения Земли в соответствии с определением скорости наземных часов в виде (6), (7), причем:

$$\frac{\delta f_{01}^\Omega}{f_0} = -\frac{\Omega_0 \Omega_y}{c^2} y_0 z_0; \quad \frac{\delta f_{02}^\Omega}{f_0} = -\frac{\Omega_0 \Omega_x}{c^2} x_0 z_0;$$

$$\frac{\delta f_{03}^\Omega}{f_0} = \frac{\Omega_0}{c^2}\left(\Delta\Omega_z + \Omega_z^{ПР}\right)\left(x_0^2 + y_0^2\right), \qquad (21)$$

а составляющие угловой скорости Земли по осям $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ определяются формулами (2.91).

2. Основная составляющая релятивистского смещения времени спутниковых и наземных часов

Рассмотрим различные формы представления основного релятивистского смещения, которые могут быть удобны при различных условиях его вычисления и компенсации.

2.1. Представление через истинную и среднюю аномалию

Выразим основную составляющую релятивистского смещения времени спутниковых и наземных часов (15) через истинную аномалию КА на орбите ϑ. Для этого используем известные выражения из теории кеплеровского движения [10]:

$$\frac{\mu_e}{\rho_c} = \frac{\mu_e}{P}\left(1 + e\cos\vartheta\right),\quad V_c^2 = \frac{\mu_e}{P}\left(1 + e^2 + 2e\cos\vartheta\right), \tag{22}$$

где $P; e$ − фокальный параметр и эксцентриситет орбиты соответственно. В результате для бесконечно малого приращения релятивистского смещения получаем:

$$d\tau_P^{осн} = \frac{\Phi_0}{c^2}d\tau - \frac{\mu_e}{2Pc^2}\left(3 + e^2\right)d\tau - \frac{2e\mu_e}{Pc^2}\cos\vartheta d\tau\,, \tag{23}$$

где индекс «о» при базовом времени τ здесь и далее для упрощения записи опускаем. Далее воспользуемся известным разложением, связывающим истинную ϑ и среднюю аномалии М [10]:

$$\cos\vartheta = -e + \frac{2\left(1 - e^2\right)}{e}\sum_{k=1}^{\infty} J_k\left(ke\right)\cos kM\,, \tag{24}$$

где $J_k\left(ke\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\left(n+k\right)!}\left(\frac{ke}{2}\right)^{k+2n}$ − функция Бесселя первого рода; $M = \Omega_C\left(\tau - \tau_П\right)$ − средняя аномалия; a − большая полуось орбиты; $\tau_П$ − время прохождения перигея; $\Omega_C = \sqrt{\mu_З / a^3}$ − угловая скорость движения спутника по орбите (среднее движение).

Ограничиваясь рассмотрением орбит с эксцентриситетом от нуля (круговые орбиты навигации, связи и др.) до $e \approx 0,73$ (высокоэллиптические орбиты спутников связи типа «Молния»), оставим в разложении (24) первые шесть функций Бесселя, содержащие эксцентриситет в степени по десятую включительно:

$$J_1(e)=\frac{e}{2}\left(1-\frac{e^2}{8}+\frac{e^4}{192}-\frac{e^6}{9216}+...\right), J_2(2e)=\frac{e^2}{2}\left(1-\frac{e^2}{3}+\frac{e^4}{24}-\frac{e^6}{360}+...\right),$$

$$J_3(3e)=\frac{9}{16}e^3\left(1-\frac{9e^2}{16}+\frac{81e^4}{640}-...\right), J_4(4e)=\frac{2e^4}{3}\left(1-\frac{4e^2}{5}+\frac{4e^4}{15}-...\right),$$

$$J_5(5e)=\frac{625e^5}{768}\left(1-\frac{25e^2}{24}+\frac{625e^4}{1344}-...\right),$$

$$J_6(6e)=\frac{81e^6}{80}\left(1-\frac{9e^2}{7}+\frac{81e^4}{112}-...\right). \tag{25}$$

Учитывая далее, что $P=a\left(1-e^2\right)$, где a − полуось орбиты спутника, в результате интегрирования выражения (23) на интервале времени от момента синхронизации τ_H до текущего момента τ с использованием соотношений (24) и (25) получаем:

$$\Delta\tau_P^{осн1}=\frac{1}{c^2}\left(\Phi_0-\frac{3\mu_e}{2a}\right)\left(\tau-\tau_H\right)+\Delta\tau_P^{эл1}, \tag{26}$$

где

$$\Delta\tau_P^{эл1}=-\frac{4\sqrt{\mu_e a}}{c^2}\sum_{k=1}^{6}\frac{J_k(ke)}{k}\left[\sin k\Omega_C\left(\tau-\tau_П\right)-\sin k\Omega_C\left(\tau_H-\tau_П\right)\right] \tag{27}$$

− «эллиптическая» составляющая релятивистского смещения времени в первой ее форме представления.

В полученном выражении (26) первый член определяет линейно нарастающее в базовом времени релятивистское расхождение шкал времени бортовых и наземных часов $\Delta\tau_P^-$, вызванное постоянной относительной релятивистской разностью частот $\Delta f_p^=$ их задающих генераторов:

$$\Delta\tau_P^-=\tau_c-\tau=\frac{\Delta f_P^=}{f_0}\left(\tau-\tau_H\right), \tag{28}$$

где

$$\frac{\Delta f_P^=}{f_0}=\frac{1}{c^2}\left(\Phi_0-\frac{3\mu_e}{2a}\right). \tag{29}$$

Соотношение (27) описывает периодически изменяющуюся, в общем случае несинусоидальную составляющую релятивистского расхождения времени, определяемую эксцентриситетом орбиты спутника. Назовем ее условно «эллиптической». Она зависит от эксцентриситета и имеет гармонические составляющие с частотами $k\Omega_C$. Второй член определяет постоянную «подставку». Наличие гармоник в спектре периодической составляющей вызвано неравномерностью эллиптического орбитального движения спутника вдоль орбиты. Нетрудно показать, что лишь при очень малом эксцентрисистете орбиты спутника периодические изменения времени имеют синусоидальный характер.

Анализ формул (28), (29) показывает, что в зависимости от размера большой полуоси орбиты спутника линейно нарастающий эффект расхождения бортовой и наземной шкал времени может быть положительным ($\Delta\tau_P^- \geq 0,\ \ \Delta f_P^= \geq 0$, т.е. бортовые часы идут быстрее наземных) и отрицательным ($\Delta\tau_P^- < 0,\ \Delta f_P^= < 0$, бортовые часы отстают). Критический размер большой полуоси орбиты, когда эти эффекты компенсируют друг друга, находится, согласно формуле (29), из условия

$$\Phi_0 = \frac{3\mu_e}{2a}, \text{ или } \frac{1}{R_e} \approx \frac{3}{2a},$$

откуда

$$a_{кр} \approx 9,6 \cdot 10^6 \, м. \tag{30}$$

В результате, при $a < a_{кр}$ взаимный релятивистский эффект смещения бортового времени спутника, находящегося на околокруговой орбите, относительно наземного времени отрицателен: бортовые часы отстают от наземных (низкоорбитальные спутники связи, спутники дистанционного зондирования Земли, геодезические спутники и др.).

Для околокруговых орбит, отвечающих условию $a > a_{кр}$, этот эффект положителен, т.е. бортовые спутниковые часы идут быстрее неподвижных наземных. Этому условию подчиняются бортовые часы средневысотных глобальных спутниковых навигационных систем (ГНСС) ГЛОНАСС, GPS, GALILEO, а также часы, размещенные на борту геостационарных КА связи и навигации ($a \approx 4,3 \cdot 10^7$ м).

Для сетевых многоспутниковых космических систем связи и навигации характерно достаточно малое отличие размеров полуосей орбит спутников, входящих в орбитальную сеть. Поэтому представим большую полуось орбиты каждого спутника в виде

$$a = a_0 + \Delta a, \tag{31}$$

где a_0 − среднее значение большой полуоси для всех спутников системы; причем, $\Delta a \ll a_0$. На основе этого условия формула для основного релятивистского смещения времени (26), как составляющей общей формулы (13), принимает окончательный вид:

$$\Delta\tau_P^{осн1} = \frac{1}{c^2}\left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0}\right)(\tau-\tau_H) + \frac{3\mu_e\Delta a}{2c^2a_0^2}(\tau-\tau_H) -$$
$$-\frac{4\sqrt{\mu_e a_0}}{c^2}\sum_{k=1}^{6}\frac{J_k(ke)}{k}\left[\sin k\Omega_{C0}(\tau-\tau_П) - \sin k\Omega_{C0}(\tau_H-\tau_П)\right], \qquad (32)$$

где $\Omega_{C0} = \sqrt{\mu_e/a_0^3}$ – среднее движение всех спутников орбитальной системы.

Конкретные значения релятивистских эффектов, определяемых этой формулой, проводятся в последующих разделах применительно к конкретным системам навигации, геодезии, связи и др.

2.2. Представление через эксцентрическую аномалию

Если использовать выражение, связывающее эксцентрическую и среднюю аномалии спутника E и M в виде [11]:

$$\sin E = \frac{2}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_k(ke)}{k}\sin kM,$$

где $J_k(ke); M$ определены в соотношении (24), то формулу (32) получаем в следующей форме:

$$\Delta\tau_P^{осн1} = \frac{1}{c^2}\left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0}\right)(\tau-\tau_H) + \frac{3\mu_e\Delta a}{2c^2a_0^2}(\tau-\tau_H) + \Delta\tau_P^{эл2}, \qquad (33)$$

где

$$\Delta\tau_P^{эл2} = -\frac{2\sqrt{\mu_З a}}{c^2}e(\sin E - \sin E_H) = -\frac{2\sqrt{\mu_З a}}{c^2}e\sin E - const, \qquad (34)$$

причем E_H соответствует начальному моменту интегрирования; const – постоянная составляющая, соответствующая известному значению E_H.

Соотношение (34) определяет переменную «эллиптическую» составляющую релятивистского смещения бортового времени во второй ее форме, выраженную через текущую эксцентрическую аномалию.

Переменную часть «эллиптической» составляющей (34) удобно представить еще в одной форме - через скалярное произведение текущего радиус-вектора $\vec{R_c}$ и текущего вектора скорости спутника $\vec{V}_c$ [12, 13]:

$$\Delta\tau_P^{эл3} = -\frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2}e\sin E = -\frac{2\vec{R_c}\vec{V_c}}{c^2} = -\frac{2}{c^2}\left(XV_x + YV_y + ZV_z\right)_c, \qquad (35)$$

где (XYZ) и $(V_xV_yV_z)$ – текущие прямоугольные координаты и составляющие скорости спутника по осям выбранной невращающейся системы отсчета.

Чтобы показать идентичность этих форм представления «эллиптического» эффекта, представим последнее соотношение в виде:

$$\sqrt{\mu_e a}\cdot e\sin E=\vec{R}\vec{V}=RV_r\,, \tag{36}$$

где V_r − радиальная составляющая скорости спутника (индекс «с» здесь для простоты опускаем). Правую часть этого равенства преобразуем, используя известные формулы из теории кеплеровского движения [10, 11]:

$$R=\frac{P}{1+e\cos\vartheta};\ V_r=\sqrt{\frac{\mu_e}{P}}e\sin\vartheta;\ \cos\vartheta=\frac{1-tg^2\frac{\vartheta}{2}}{1+tg^2\frac{\vartheta}{2}};$$

$$\sin\vartheta=\frac{2tg\frac{\vartheta}{2}}{1+tg^2\frac{\vartheta}{2}};\quad tg^2\frac{E}{2}=\frac{1-e}{1+e}tg^2\frac{\vartheta}{2}. \tag{37}$$

После несложных преобразований приходим к левой части равенства (36) и, соответственно, к формуле (35).

2.3. Представление через текущий радиус-вектор и скорость спутника

Еще одна форма представления основного релятивистского смещения времени в системе спутник−Земля следует из соотношения (15), если в правую ее часть прибавить и отнять постоянную частотную релятивистскую расстройку бортового и спутникового генератора в виде $\frac{3\mu_e}{2c^2a}$, где полуось орбиты a определяется соотношением (31). В результате на интервале интегрирования $(\tau-\tau_H)$ основную составляющую релятивистского расхождения бортовых и наземных часов можно представить в следующем виде:

$$\Delta\tau_P^{осн2}=\int\limits_{\tau 0}\frac{\Delta f_P^{осн}}{f_0}d\tau=\frac{1}{c^2}\left(\Phi_0-\frac{3\mu_e}{2a_0}\right)(\tau-\tau_H)+$$

$$+\frac{3\mu_e\Delta a}{2c^2a_0^2}(\tau-\tau_H)+\frac{1}{c^2}\int\limits_{\tau}\left(\frac{3\mu_e}{2a}-\frac{\mu_e}{\rho_c}-\frac{V_c^2}{2}\right)d\tau, \tag{38}$$

где $\rho_C=\left(X_C^2+Y_C^2+Z_C^2\right)^{0,5};V_C^2=V_{CX}^2+V_{CY}^2+V_{CZ}^2$.

Сравнивая полученную формулу с выведенной ранее формулой (34), следует отметить их практически полную идентичность: первые два слагаемых изменяются во времени по линейному закону, а третье слагаемое должно определять переменную составляющую релятивистского расхождения бортового и наземного времени.

Покажем, что в частном случае движения по кеплеровским орбитам последний член формулы (38) определяет переменное «эллиптическое» расхождение бортового и наземного времени.

Из интеграла энергии, характеризующего кеплеровское эллиптическое движение спутника [10], следует:

$$\frac{V_C^2}{2} = \frac{\mu_e}{\rho_C} - \frac{\mu_e}{2a}, \tag{39}$$

где использованы те же обозначения, что и в предыдущей формуле.

Подставляя это выражение в формулу (38), получаем ее новую форму:

$$\Delta\tau_P^{осн3} = \frac{1}{c^2}\left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0}\right)(\tau - \tau_H) + \\ + \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2}(\tau - \tau_H) - \frac{2\mu_e}{c^2}\int_{\tau_H}^{\tau}\left(\frac{1}{\rho_C} - \frac{1}{a}\right)d\tau. \tag{40}$$

Выделим из этого соотношения член, который, по нашему предположению, определяет «эллиптическое» смещение времени:

$$d\tau_P^{эл} = -\frac{2\mu_e}{c^2}\left(\frac{1}{\rho_C} - \frac{1}{a}\right)d\tau. \tag{41}$$

Далее воспользуемся известной связью эксцентрической аномалии спутника E и его средней аномали M, которая определена нами в соотношении (24):

$$E - e\sin E = \sqrt{\frac{\mu_e}{a^3}}\left(\tau - \tau_П\right), \tag{42}$$

а также формулой, связывающей текущий радиус-вектор спутника ρ_C и его эксцентрическую аномалию:

$$\rho_C = a\left(1 - e\cos E\right). \tag{43}$$

Дифференцируя выражение (42) по τ, находим:

$$d\tau = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_e}}\left(1 - e\cos E\right)dE. \tag{44}$$

Подставляя выражения (44) и (43) в формулу (41), после несложных преобразований получаем:

$$d\tau_P^{эл} = -\frac{2\mu_e}{c^2}\left(\frac{1}{\rho_C} - \frac{1}{a}\right)d\tau = -\frac{2\sqrt{\mu_e a}}{c^2}e\cos E dE = d\tau_P^{эл2}. \tag{45}$$

Подставляя это выражение в формулу в (40) и выполняя интегрирование от E_H до текущего E, приходим к формуле (33).

Таким образом, основную составляющую релятивистского смещения бортового времени спутника относительно наземного времени (15) можно представить в нескольких формах: $\Delta\tau_{\text{р}}^{\text{осн1}}$– формулы (32) и (33), $\Delta\tau_{P}^{осн3}$ – формула (40) и $\Delta\tau_{\text{р}}^{\text{осн2}}$ − формула (38). Каждая из этих форм может найти свое практическое применение.

Принципиальное различие формул (32) − (40) от формулы (38) состоит в том, что первые из перечисленных получены в соответствии с формулами (22) и (39), для случая невозмущенного кеплеровского движения в центральном поле тяготения Земли и не учитывает возмущения, вызванные неоднородностью поля тяготения, влияние полей Луны и Солнца, сопротивление атмосферы, световое давление и др. В формуле же (38) все эти возмущения учитываются в текущих характеристиках орбиты ρ_C, V_C, a. Важно отметить, что в космических навигационных системах текущие истинные значения координат и составляющих скорости навигационного спутника доступны любому потребителю, поскольку передаются в виде эфемеридной информации. Отмеченное обстоятельство очень важно с точки зрения полноты учета и компенсации влияния релятивистских эффектов в бортовых спутниковых часах на точность геодезических измерений, на точность навигации и синхронизации и т.д.

Различные формы представления «эллиптического» смещения бортового времени: $\Delta\tau_{P}^{эл1}$ − формула (27), $\Delta\tau_{P}^{эл2}$ − формула (34), $\Delta\tau_{P}^{эл3}$ − формула (35) – также найдут применение в задачах учета и компенсации периодических релятивистских эффектов. В частности, формула (27) используется при корректировке бортовых часов системы ГЛОНАСС [14], а формула (35) – при компенсации этого эффекта в аппаратуре приемников системы GPS [12] .

3. Релятивистские эффекты смещения частоты и времени спутниковых часов, вызванные неоднородностью ГПЗ

Влияние неоднородности ГПЗ на величину релятивистского смещения бортового времени и частоты рассмотрим через влияние наибольших по величине второй и третьей зональных гармоник разложения геопотенциала, которые на основе (10) и (11) представим в виде:

$$\delta\varphi_e^{(2)} = -\frac{\mu_e R_e^2 J_2}{2\rho_c^3}\left(3\sin^2\psi_C - 1\right), \tag{46}$$

$$\delta\varphi_e^{(3)} = -\frac{\mu_e R_e^3 J_3}{2\rho_c^4}\left(5\sin^3\psi_c - 3\sin\psi_c\right). \tag{47}$$

Действие неоднородности ГПЗ на орбитальные часы проявляется двояко:

- во-первых, в виде возмущающего гравитационного потенциала, воздействующего непосредственно на шкалу орбитальных часов в соответствии с формулами (1), (8)−(10);
- во-вторых, в виде воздействия на основную составляющую смещения частоты и времени спутника (15) через изменение кеплеровских параметров орбиты спутника ρ_C, V_C.

Рассмотрим оба этих воздействия.

Смещения частоты и времени, вызванные непосредственным влиянием потенциалов зональных и других гармоник потенциала, определяется соотношением (17), причем относительные частотные смещения, согласно (46) и (47), выражаются формулами:

$$\frac{\Delta f_{P\varphi}^{n2}}{f_0} = \frac{\mu_e R_e^2 J_2}{2c^2 \rho_c^3}\left(3\sin^2\psi_C - 1\right),$$

$$\frac{\Delta f_{P\varphi}^{n3}}{f_0} = \frac{\mu_e R_e^3 J_3}{2c^2 \rho_c^4}\left(5\sin^3\psi_c - 3\sin\psi_c\right). \tag{48}$$

3.1. Эффект от воздействия потенциала второй зональной гармоники

Для решения этой задачи произведём замену [10]:

$$\sin\psi = \sin u \sin i, \tag{49}$$

где i − наклонение орбиты (индекс «с» для упрощения записи опускаем);

$$u = \omega + \vartheta \tag{50}$$

– аргумент широты спутника; ω − угловое расстояние перигея; ϑ − истинная аномалия. Поэтому

$$\sin^2\psi = \frac{1}{2}\sin^2 i + \frac{1}{2}\sin^2 i \cos 2(\omega + \vartheta). \tag{51}$$

Далее, учитывая соотношение (22) и связь $P = a\left(1 - e^2\right)$, выражение (47) приводим к виду:

$$\frac{\Delta f_{P\varphi}^{n2}}{f_0} = -\frac{3\mu_e R_e^2 J_2}{4c^2 \rho_c^3}\sin^2 i \cos 2(\omega + \vartheta) - \frac{\mu_e R_e^2 J_2}{2c^2 \rho_c^3}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right), \tag{52}$$

где текущий радиус-вектор спутника определяется соотношением:

$$\rho_c = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\vartheta}. \tag{53}$$

Полученная формула является достаточно общей и позволяет рассчитать эффект воздействия второй зональной гармоники на время и частоту спутниковых часов, находящихся на произвольной эллиптической орбите. Однако при эллиптическом движении спутника существенно изменяется и рассмотренный выше основной эффект смещения спутникового времени, а поэтому выделить эффект зональной гармоники затруднительно.

В этой связи для оценки величины искомого эффекта рассмотрим движение спутника по околокруговой орбите при $e \le 0,01$. В этом случае можно пренебречь квадратом малого эксцентриситета, поэтому $\rho_c^3 \approx a^3/\left(1+3e\cos\vartheta\right)$. Формула (52) при этих условиях принимает вид:

$$\frac{\Delta f_{P\varphi}^{n2}}{f_0} = -\frac{N}{2c^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right) - \frac{3}{4c^2}N_2\sin^2 i\cos 2\left(\omega+\vartheta\right) +$$

$$+\frac{18}{4c^2}N_2 e\cos^3\left(\omega+\vartheta\right) + \frac{3}{4c^2}N_2 e(3\sin^2 i-5)\cos\left(\omega+\vartheta\right), \tag{54}$$

где принято обозначение:

$$N_2 = \frac{\mu_e R_e^2 J_2}{a^3}. \tag{55}$$

В полученном выражении два последних члена существенно (в данном случае на два порядка) меньше первых двух. Поэтому оценку влияния зональных гармоник целесообразно провести, ограничиваясь рассмотрением только круговых орбит. В результате при $e=0$, $\omega=0$, $\vartheta = M = \Omega_c(\tau-\tau_П) = \sqrt{\mu_e/a^3}(\tau-\tau_П)$ формула (54) принимает вид:

$$\frac{\Delta f_{P\varphi}^{n2}}{f_0} = -\frac{N_2}{2c^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right) - \frac{3}{4c^2}N_2\sin^2 i\cos 2\Omega_c(\tau-\tau_П). \tag{56}$$

Соответствующий сдвиг бортовой шкалы времени относительно наземной, вызванный только влиянием потенциала второй зональной гармоники, определится выражением:

$$\delta\tau_{P\varphi}^{n2} = \int_{\tau_H}^{\tau}\frac{\Delta f_P^{n2}}{f_0}d\tau = -\frac{N_2}{2c^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)(\tau-\tau_H) -$$

$$-\frac{3J_2}{8c^2}\sqrt{\mu_e a}\left(\frac{R_e}{a}\right)^2\sin^2 i\left[\sin 2\Omega_c(\tau-\tau_П) - \sin 2\Omega_c(\tau_H-\tau_П)\right]. \tag{57}$$

Таким образом, влияние потенциала второй зональной гармоники в разложении потенциала ГПЗ проявляется в виде линейно нарастающей и периодической составляющей смещения шкалы бортового времени. При этом частота периодической составляющей в два раза выше частоты обращения спутника по орбите (среднего движения). Величина обеих составляющих уменьшается с высотой и существенно зависит от наклонения орбиты через сомножитель $\sin^2 i$. В частности, при $i = 55^\circ$ коэффициент при линейной составляющей обращается в нуль: $(1{,}5\sin^2 55^\circ - 1) = 0$. При наклонениях орбиты, превышающих 55° этот коэффициент положителен, при меньших – отрицателен.

Для примера рассмотрим бортовые часы геодезического спутника Jason-3 с большой полуосью орбиты 7,715·106 м, наклонением орбиты 66°, периодом обращения по орбите 112,4 мин (запущен в космос 17.01.2016 г., производитель – Thales Alenia Spase, заказчики: NOAA, NASA, CNES, Eumetsat. Постоянный частотный релятивистский сдвиг бортового задающего генератора этого спутника, согласно выражению (56), составляет $2{,}4\cdot 10^{-14}$. Соответствующая линейная составляющая релятивистского смещения бортовой шкалы на суточном интервале составляет около 2 нс. Амплитуда периодического колебания релятивистского сдвига частоты для того же спутника составляет $2{,}4\cdot 10^{-15}$. Соответствующая амплитуда релятивистского набега времени составляет около 0,13 нс. Колебание релятивистского набега бортового времени происходит с периодом, который вдвое меньше периода обращения спутника по орбите, т.е. около 56 мин.

Для КА ГЛОНАСС постоянный релятивистский частотный сдвиг, определяемый первым членом (56), достигает $1{,}2\cdot 10^{-15}$, что на суточном интервале вызывает смещение времени 0,1 нс. Амплитуда переменной составляющей релятивистского смещения (57) составляет 21,5 пс.

3.2. Эффект воздействия потенциала третьей зональной и других гармоник потенциала

На основе формулы (48), определяющей относительное релятивистское смещение частоты бортового генератора за счет влияния потенциала третьей зональной гармоники потенциала ГПЗ, для круговой орбиты ($\rho_c = a$) находим соответствующий уход бортовой шкалы времени:

$$\delta\tau_p^{n3} = \frac{N_3}{2c^2}\int_{\tau_H}^{\tau}\left(5\sin^3\psi_c - 3\sin\psi_c\right)d\tau, \tag{58}$$

где принято обозначение:

$$N_3 = \frac{\mu_e R_e^3 J_3}{a^4}. \tag{59}$$

Далее, используя замену (49), а также необходимые формулы тригонометрии:

$$\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x;\ \ \cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\ ,$$

в результате интегрирования (58) получаем:

$$\delta\tau_P^{n3} = \frac{3N_3}{2c^2\Omega_c}\left(\frac{15}{12}\sin^3 i - \sin i\right)\left[\cos\Omega_c\left(\tau-\tau_П\right)-\cos\Omega_c\left(\tau_H-\tau_П\right)\right]-$$

$$-\frac{5}{24}\frac{N_3\sin^3 i}{c^2\Omega_c}\left[\cos 3\Omega_c\left(\tau-\tau_П\right)-\cos 3\Omega_c\left(\tau_H-\tau_П\right)\right]. \qquad (60)$$

Таким образом, релятивистский сдвиг бортового времени спутниковых часов, вызванный влиянием потенциала третьей зональной гармоникой потенциала ГПЗ, имеет две периодические составляющие, одна из которых изменяется с частотой обращения спутника по орбите Ω_c, а вторая имеет частоту изменения 3 Ω_c.

Оценка амплитуды относительного частотного смещения бортового стандарта частоты спутника Jason-3 на основе формулы (48) составляет: $N_3/2c^2 \approx 4\cdot10^{-16}$. Соответствующая амплитуда периодического смещения шкалы времени с частотой Ω_c составляет около 1,2 пс. Амплитуда периодической составляющей выражения (61) с утроенной частотой не превышает 0,3 пс.

Амплитуда относительного смещения частоты за счет третьей гармоники для средневысотной ГНСС типа ГЛОНАСС, согласно (48), достигает $3{,}4\cdot10^{-18}$, а соответствующая амплитуда колебания шкалы времени – 0,06 пс.

Четвертая зональная гармоника имеет следующие характеристики [8]:

$$J_4 = -1{,}63\cdot10^{-6}, \quad P_4\left(\sin\psi_c\right) = \frac{35}{8}\left(\sin^4\psi_c - \frac{15}{4}\sin^2\psi_c + \frac{3}{8}\right).$$

Далее, по аналогии с формулой (48), находим соответствующее частотное смещение:

$$\frac{\Delta f_P^{n4}}{f_0} = -\frac{35\mu_e R_e^4 J_3}{8c^2\rho_c^5}\left(\sin^4\psi_c - \frac{15}{4}\sin^2\psi_c - \frac{3}{8}\right).$$

Соответствующее релятивистское смещение временной шкалы составит:

$$\delta\tau_P^{n4} = -\frac{35\mu_e R_e^4 J_3}{8c^2\rho_c^5}\int_\tau\left(\sin^4\psi_c - \frac{15}{4}\sin^2\psi_c - \frac{3}{8}\right)d\tau\ . \qquad (61)$$

Значение коэффициента при полученной выше формуле для частоты в случае орбиты типа Jason-3 составляет около $2\cdot10^{-15}$. Вместе с тем, соответствующее смещение шкалы времени будет меньше, чем для третьей гармоники, так как при частоте гармоники $4\Omega_c$ период накопления эффекта уменьшается.

Поскольку другие коэффициенты разложения при зональных, секториальных и тессеральных гармониках J_n, C_{nm}, S_{nm} имеют порядок величин 10^{-6} и менее, то вклад этих гармоник в относительное частотное смещение оценивается величиной 10^{-16} и менее. Точное количество учитываемых членов разложения потенциала определяется из условий решения конкретной задачи.

3.3. Смещения частоты и времени, вызванные влиянием потенциала второй зональной гармоники на высоту орбиты спутника

Для определения степени влияния второй зональной гармоники потенциала ГПЗ на основное релятивистское смещение через изменение параметров орбиты спутника воспользуемся выражением (40) в ее дифференциальной форме:

$$d\tau_P^{осн3} = \frac{1}{c^2}\left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0}\right)d\tau + \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2}d\tau - \frac{2\mu_e}{c^2}\left(\frac{1}{\rho_C} - \frac{1}{a}\right)d\tau . \qquad (62)$$

Для упрощения расчетов рассматриваем околокруговые орбиты с малым эксцентриситетом.

Следуя [12, 13], релятивистский сдвиг (62) представляем в виде двух составляющих:

$$d\tau_P^{осн} = (d\tau_P^{осн})_0 + \delta(d\tau_P^{осн}), \qquad (63)$$

где первая составляющая определяется параметрами невозмущенной орбиты, а вторая – возмущениями параметров орбиты от второй зональной гармоники. Она выражается в виде:

$$\delta(d\tau_P^{осн}) = \frac{\partial(d\tau_P^{осн})}{\partial a}\Delta a \frac{\partial(d\tau_P^{осн})}{\partial \rho}\Delta\rho \approx$$

$$\approx -\frac{\mu_e}{2c^2 a_0^2}\Delta a d\tau + \frac{2\mu_e}{c^2 a_0^2}\Delta\rho d\tau, \qquad (64)$$

где $\Delta a, \Delta\rho$ − малые искажения параметров орбиты. В силу малости эффектов здесь принято, что $\rho^2 \approx a^2 \approx a_0^2$.

Учитывая, что для невозмущенного кеплеровского движения спутника справедливо соотношение:

$$\rho = a(1 - e\cos E), \qquad (65)$$

путем его дифференцирования находим:

$$\Delta\rho = \Delta a - a\cos E \Delta e + ae\sin E \Delta E , \qquad (66)$$

где возмущения, вызванные влиянием второй зональной гармоникой на параметры околокруговой орбиты, выражаются соотношениями [11, 12, 13]:

$$\Delta a\left(J_2\right)=\frac{3R_e^2}{2a}J_2\sin^2 i\cos 2u, \tag{67}$$

$$\Delta e\left(J_2\right)=\frac{3R_e^2}{2a^2}J_2\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\cos\vartheta+\right.$$

$$\left.+\sin^2 i\left[\frac{5}{6}\cos\left(2u+\vartheta\right)+\frac{1}{2}\sin 2u\sin\vartheta\right]\right\}, \tag{68}$$

$$\Delta E\left(J_2\right)=\frac{R_e^2}{2a^2e}J_2\left\{3\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sin\vartheta+\right.$$

$$\left.\sin^2 i\left[\frac{3}{2}\cos 2u\sin\vartheta+\sin\left(2u+\vartheta\right)\right]\right\} \quad , \tag{69}$$

где учтено, что для околокруговых орбит $E\approx M$; $\Delta E\approx\Delta M$.

Подставляя эти возмущения в (66) и выполняя несложные преобразования, находим искомое выражение для возмущения радиус-вектора:

$$\Delta\rho=\frac{R_e^2J_2}{2a_0}\left[3\left(\frac{3}{2}\sin^2 i-1\right)+\frac{1}{2}\sin^2 i\cos 2u\right]. \tag{70}$$

Подставляя выражения (67) и (70) в (64), находим вторую составляющую изменения релятивистского смещения времени, вызванную воздействием второй зональной гармоники на орбиту спутника:

$$\delta\left(d\tau_P^{осн}\right)=-\frac{3N_2}{c^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)d\tau-\frac{N_2}{4c^2}\sin^2 i\cos 2\Omega_c\left(\tau-\tau_П\right)d\tau, \tag{71}$$

где для круговых орбит справедливо равенство $u=\vartheta=\Omega_c(\tau-\tau_П)$, а соответствующий релятивистский сдвиг частоты составляет:

$$\frac{\Delta f_P^{осн}}{f_0}=-\frac{3N_2}{c^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)-\frac{N_2}{4c^2}\sin^2 i\cos 2\Omega_c\left(\tau-\tau_П\right). \tag{72}$$

Интегрируя полученное соотношение (71) по времени и складывая полученный результат с выражением (57), находим полное релятивистское смещение бортового времени (17), вызванное воздействием потенциала второй зональной гармоники непосредственно на часы и на орбиту спутника:

$$\delta\tau_P^{n2}=\delta\tau_{P\varphi}^{n2}+\delta\tau_P^{осн}=\int_{\tau_H}^{\tau}\frac{\Delta f_P^{n2}}{f_0}d\tau=-\frac{7N_2}{2c^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)(\tau-\tau_H)-$$

$$-\frac{J_2\sqrt{\mu_e a}}{2c^2}\left(\frac{R_e}{a}\right)^2\sin^2 i\left[\sin 2\Omega_c(\tau-\tau_П)-\sin 2\Omega_c(\tau_H-\tau_П)\right], \tag{73}$$

где N_2 определяется соотношением (55), а соответствующая относительная релятивистская разность частот задающих генераторов бортовых и наземных (базовых) часов составляет:

$$\frac{\Delta f_P^{n2}}{f_0} = -\frac{N_2}{c^2}\left[\sin^2 i \cos 2\Omega_c\left(\tau - \tau_\Pi\right) + \frac{7}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right]. \qquad (74)$$

Сравнивая выражения для релятивистских частотных смещений (56) (непосредственное влияние потенциала) и (72) (влияние искажений высоты орбиты) интересно отметить, что при одинаковых знаках смещений постоянная составляющая во втором случае в 6 раз больше, однако при этом переменная составляющая в 3 раза меньше. Это свидетельствует о том, что влияние искажений высоты орбиты на величину линейной составляющей релятивистского эффекта в 6 раз больше, нежели непосредственное влияние потенциала.

Результирующая формула релятивистского смещения времени, учитывающая рассмотренные выше три составляющие: основную, «эллиптическую» и вызванную потенциалом второй зональной гармоники, следует из формул (32), (33) и (40):

$$\Delta\tau_P^c = \tau_C - \tau = \frac{1}{c^2}\left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0}\right)\left(\tau - \tau_H\right) + \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2}\left(\tau - \tau_H\right) + \Delta\tau_P^{эл} + \delta\tau_P^{n2}, \quad (75)$$

где τ − время, отсчитываемое по базовым часам; «эллиптическая» составляющая $\Delta\tau_P^{эл}$ определяется в формах (27), (34), (35); смещение, вызванное второй зональной гармоникой, $\delta\tau_P^{n2}$ − в виде (73).

Полученная формула может быть использована в качестве первого приближения для релятивистской синхронизации наземных и космических орбитальных часов.

4. Приливные лунно-солнечные релятивистские смещения частоты и времени спутниковых и наземных часов

Взаимные приливные лунно-солнечные релятивистские смещения частоты и времени наземных и спутниковых часов будем рассматривать как разность этих смещений, каждое из которых вычисляется относительно центра Земли в единицах координатного времени $t = t_{TCG}$. Используя формулы (18) и (19), искомую разность представим в виде:

$$\Delta\tau_{MS}^{0C} = \Delta\tau_{MS}^{C} - \Delta\tau_{MS}^{0} = \int_{\tau_H}^{\tau}\left(\frac{\Delta f_{MS}^{0}}{f_0} - \frac{\Delta f_{MS}^{C}}{f_0}\right)dt = \int_{\tau_H}^{\tau}\sum_{i=M,S}\left(\delta\varphi_i^0 - \delta\varphi_i^C\right)dt. \quad (76)$$

После вычисления этой весьма незначительной разности времени переход к собственному времени $\tau = \tau_0$ наземного базового хранителя выполняется простой заменой обозначений, поскольку вносимые при этом погрешности проявляются лишь в десятом знаке после запятой.

4.1. Приливные релятивистские смещения наземных базовых часов

Для вычисления приливного релятивистского смещения воспользуемся соотношением:

$$\Delta\tau_i^0 = \int_{\tau 0} \frac{\Delta f_i^0}{f_0} d\tau_0 = \frac{1}{c^2} \int_{\tau 0} \delta\varphi_i^0 dt, \tag{77}$$

где $i = M; S$; Δf_i^0 − смещение частоты наземного генератора относительно частоты генератора в точке вблизи центра Земли, где приливный потенциал Луны и Солнца пренебрежимо мал и где действует геоцентрическое координатное время t.

Для i-го тяготеющего небесного тела смещение частоты наземного генератора находим в виде:

$$\frac{\Delta f_i^0}{f_0} = \frac{\Delta f_{iA}}{f_0} + \frac{\Delta f_{iB}}{f_0} + \frac{\Delta f_{iC}}{f_0}; \tag{78}$$

$$\frac{\Delta f_{iA}}{f_0} = \frac{3\gamma D_i}{2c^2}\left(\sin^2\psi_0 - \frac{1}{3}\right)\left(\cos 2\delta_0 + \frac{1}{3}\right); \tag{79а}$$

$$\frac{\Delta f_{iB}}{f_0} = \frac{\gamma D_i}{c^2} \sin 2\psi_0 \sin 2\delta_0 \cos t_{\odot}^0; \tag{79б}$$

$$\frac{\Delta f_{iC}}{f_0} = \frac{\gamma D_i}{c^2} \cos^2\psi_0 \cos^2\delta_0 \cos 2t_{\odot}^0, \tag{79в}$$

где D_i − постоянная Дудсона для i-го небесного тела (для Луны $D_M = 2,6206$ м^{2}с$^{-2}$; для Солнца $D_S = 1,2035$ м^{2}с$^{-2}$ [9]); ψ_0 − геоцентрическая широта наземных часов; δ_0, $t_{\odot}^0$ − склонение и часовой угол небесного тела.

Период изменения составляющей приливного смещения частоты (79а) составляет полгода для Солнца и полмесяца – для Луны. Максимальное значение смещения, определяемое величиной коэффициента, для Луны равен $3\cdot10^{-17}$, для Солнца − $1,4\cdot10^{-17}$. Набег релятивистского приливного смещения времени, вычисленного в соответствии с формулой (79а), для Солнца на интервале около 40 суток (примерно четверть периода) превышает 40 пс, для Луны на интервале в трое суток достигает 10 пс.

Частотное смещение, определяемое формулой (79б), имеет суточный период колебания. Амплитуда колебания разности частот $2\gamma D / c^2$ составляет для Луны $4\cdot10^{-17}$, для Солнца – $1,8\cdot10^{-17}$.

Смещение (79в) имеет полусуточный период колебания. Амплитуда колебания частоты равна амплитуде его суточного колебания.

На основе вычисления частотных сдвигов (78) – (79) находим приливный сдвиг шкалы времени наземных часов:

$$\Delta\tau_i^0 = \int_{\tau 0} \frac{\Delta f_i^0}{f_0} d\tau_0 = \frac{1}{f_0} \int_{\tau 0} \left(\Delta f_{iA} + \Delta f_{iB} + \Delta f_{iC}\right) d\tau, \; i = M;S, \qquad (80)$$

откуда следует выражение для искомого приливного смещения наземных часов, определяемого влиянием Луны и Солнца:

$$\Delta\tau_{MS}^0 = \sum_{i=MS} \Delta\tau_i^0 . \qquad (81)$$

4.2. Приливные релятивистские смещения спутниковых часов

В соответствии с формулами (19) и (76) приливное смещение времени спутниковых часов определяется соотношением:

$$\Delta\tau_{MS}^C = \sum_{i=MS} \int_{t_H}^{t} \frac{\Delta f_i^C}{f_0} dt = -\frac{1}{c^2} \sum_{i=MS} \int_{t_H}^{t} \delta\varphi_i^C dt, \qquad (82)$$

где приливный потенциал i-го светила определяется формулой (12), которую представим в более удобном виде:

$$\delta\varphi_c^i = \frac{\mu_i \rho_C^2}{2r_i^3}\left(3\cos^2 z_c^i - 1\right). \qquad (83)$$

Для решения задачи выберем связанную с Землёй невращающуюся небесную систему координат так, чтобы плоскость XOY совпадала с плоскостью орбиты Земли (плоскостью эклиптики), а ось OZ была перпендикулярна плоскости орбиты. Поскольку рассматриваемые эффекты весьма малы, то для упрощения решения плоскость экватора Земли совместим с плоскостью эклиптики. При этом ошибка при вычислении искомых эффектов не превысит 10 %. В этом случае орбитальные параметры спутника на околокруговой орбите обозначим так: $\vartheta = \Omega_C\left(t - t_E\right)$ − угол истинной аномалии; t_E − момент пересечения плоскости эклиптики; Ω_C − угловая скорость движения спутника по околоземной орбите; β_i − текущий переменный угол между линией узлов орбиты и осью OX; ν_i − наклонение орбиты спутника к плоскости эклиптики. Поскольку плоскость орбиты Луны и эклиптики практически совпадают, то $\nu_M \approx \nu_S$ (i =M; S). Ввиду годового движения Земли можно записать: $\beta_S = \frac{2\pi}{365} n + \beta_{S0}$, $\beta_M = \frac{2\pi}{28} n + \beta_{M0}$.

Функцию косинуса зенитного расстояния спутника относительно направления на тяготеющее небесное тело в формуле (83) в данной системе выразим известным соотношением [10]:

$$\cos z_i^c = \cos\vartheta \cos\beta_i - \sin\vartheta \sin\beta_i \cos\nu_i . \qquad (84)$$

Возводя это выражение в квадрат и подставляя его в (83), из (82) получаем выражение для релятивистского приливного смещения частоты задающего генератора бортовых часов:

$$\frac{\Delta f_i^C}{f_0} = A_i\left(\frac{2}{3} - \cos^2\beta_i - \sin^2\beta_i\cos^2\nu_i\right) + \\ + A_i\sin 2\beta_i\cos\nu_i\sin 2\Omega_C(t - t_E) - \\ - A_i\left(\cos^2\beta_i - \sin^2\beta_i\cos^2\nu_i\right)\cos 2\Omega_C(t - t_E), \tag{85}$$

где введено обозначение:

$$A_i = \frac{3\mu_i\rho_c^2}{4c^2 r_i^3}. \tag{86}$$

Интегрируя (85) по времени от t_H до t и переходя без потери точности к базовому времени τ, получаем следующий результат:

$$\Delta\tau_{MS}^C = \sum_{i=MS} A_i\left(\frac{2}{3} - \cos^2\beta_i - \sin^2\beta_i\cos^2\nu_i\right)(\tau - \tau_H) - \\ - \frac{1}{2\Omega_C}\sum_{i=MS} A_i\sin 2\beta_i\cos\nu_i\left[\cos 2\Omega_C(\tau - \tau_E) - \\ \cos 2\Omega_C(\tau_H - \tau_E)\right] - \frac{1}{2\Omega_C}\sum_{i=MS} A_i\left(\cos^2\beta_i - \\ - \sin^2\beta_i\cos^2\nu_i\left[\sin 2\Omega_C(\tau - \tau_E) - \sin 2\Omega_C(\tau_H - \tau_E)\right]\right) \tag{87}$$

Таким образом, приливный частотный сдвиг бортового генератора спутниковых часов имеет постоянную составляющую и периодическую с удвоенной частотой относительно частоты обращения по орбите. Соответственно, приливный релятивистский сдвиг бортовой шкалы времени имеет линейную составляющую и периодическую с периодом вдвое меньшим периода обращения спутника по орбите.

Оценка величины коэффициентов A_M и A_S, которые определяют максимальную величину линейного смещения частоты для часов, движущихся по геостационарной орбите, дает следующие результаты: $A_M^{ГСО} \approx 1,4\cdot 10^{-15}$; $A_S^{ГСО} \approx 0,5\cdot 10^{-15}$. Соответствующий линейный суточный сдвиг шкалы времени, вызванный влиянием приливных потенциалов Луны и Солнца, достигает, согласно (87), 40 пс и 15 пс соответственно. В полнолуние и новолуние эффекты складываются. Амплитуда переменной составляющей на порядок меньше.

Для спутников ГЛОНАСС при тех же условиях имеем: $A_M^{ГЛОН} = 5\cdot 10^{-16}$; $A_S^{ГЛОН} = 1,7\cdot 10^{-16}$. Суточный линейный релятивистский набег времени, согласно (87), при $\beta = 0$ составляет, соответственно, 12 пс и 5 пс.

5. Смещения частоты и времени наземных часов, вызванные неравномерностью вращения Земли

Смещения времени и частоты задающего генератора наземных часов, вызванные неравномерностью вращения Земли, определим в соответствии с формулами (20) и (21). Используя определения составляющих угловой скорости Земли [7], а также связь между координатами наземных часов во вращающейся и невращающейся системах координат, из (21) получаем:

$$\frac{\Delta f_{01}^{\Omega}}{f_0} = -\frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2}\left(\Omega_y^{ПР} + \Omega_y^{Н} + \Omega_y^{П}\right)\sin 2\psi_0 \sin\left(\Omega_0\tau + \lambda_0\right), \tag{88}$$

где ψ_0, λ_0 − географические координаты наземных часов. Амплитуды колебаний частоты в зависимости от разных причин следующие: по нутации – $1{,}2\cdot 10^{-16}$; по отклонению полюсов – $0{,}6\cdot 10^{-17}$; по прецессии − $1\cdot 10^{-19}$. Эти эффекты имеют суточный период колебания и их амплитуда максимальна при размещении часов на широте 45°.

Соответствующее смещение шкалы времени наземных часов, согласно (20), определяется соотношением:

$$\Delta\tau_{01}^{\Omega} = -\frac{R_e^2}{c^2}\left(\Omega_y^{Н} + \Omega_y^{П} + \Omega_y^{ПР}\right)\sin 2\psi_0 \cos\left(\Omega_0\tau + \lambda_0\right). \tag{89}$$

Оценка амплитуды периодических суточных эффектов, определяемых этой формулой, составляет: по нутации – 16,4 пс; по отклонению полюсов – 8 пс; по прецессии – $1{,}4\cdot 10^{-3}$ пс.

Поступая аналогично выводу формулы (88), находим:

$$\frac{\delta f_{02}^{\Omega}}{f_0} = -\frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2}\left(\Omega_x^{Н} + \Omega_x^{П}\right)\sin 2\psi_0 \sin\left(\Omega_0\tau + \lambda_0\right) \tag{90}$$

$$\Delta\tau_{02}^{\Omega} = -\frac{R_e^2}{c^2}\left(\Omega_x^{Н} + \Omega_x^{П}\right)\sin 2\psi_0 \cos\left(\Omega_0\tau + \lambda_0\right). \tag{91}$$

Таким образом, без учета очень малого эффекта прецессии $\Delta\tau_{01}^{\Omega} = \Delta\tau_{02}^{\Omega}$. Оценки величин частотных и временных смещений аналогичны предыдущему случаю.

Наконец, неравномерность вращения Земли вокруг оси *OZ* вызывает следующие релятивистские смещения:

$$\frac{\delta f_{03}^{\Omega}}{f_0} = \frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2}\left(\Delta\Omega_z + \Omega_z^{ПР}\right)\cos^2\psi_0. \tag{92}$$

При девиации значения угловой скорости в последние годы в пределах $-187\cdot 10^{-10} \div -3\cdot 10^{-9}$ с$^{-1}$ [15] ее вклад в релятивистский сдвиг частоты задающего генератора наземных часов находится в пределах $1\cdot 10^{-16}$ - $6\cdot 10^{-16}$. Вклад прецессии составляет около 10^{-19}.

Пренебрегая влиянием прецессии, соответствующий релятивистский сдвиг шкалы времени наземных часов определяем в общем виде:

$$\delta\tau_{03}^{\Omega} = \frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2} \int_{\tau_H}^{\tau} \Delta\Omega_z(\tau) d\tau, \tag{93}$$

где $\Delta\tau = \tau - \tau_H$ – интервал накопления эффекта. На практике этот изменяющийся во времени эффект необходимо вычислять путем численного интегрирования по текущим данным, поступающим от Службы вращения Земли.

Принимая на интервале интегрирования $\Delta\Omega_z = const$, получаем:

$$\delta\tau_{03}^{\Omega} = \frac{\Omega_0 R_e^2}{c^2} \Delta\Omega_z \Delta\tau .$$

При среднем значении изменения модуля угловой $\Delta\Omega_z = -100 \cdot 10^{-10}$ с$^{-1}$ и интервале интегрирования 3 месяца (четверть периода изменения $\Delta\Omega_z$) эффект смещения шкалы времени составляет около 2500 пс. Важно отметить, что этот эффект не зависит от периода суточного вращения.

На основе проведенных вычислений находим искомый сдвиг времени наземных часов, вызванный неравномерностью вращения Земли:

$$\Delta\tau_0^{\Omega} = \sum_{k=1}^{3} \Delta\tau_{0k}^{\Omega}, \tag{94}$$

где $\Delta\tau_{0k}^{\Omega}$ ($k = 1, 2, 3$) определяется формулами (89), (91) и (93).

6. Влияние других факторов на основной релятивистский эффект через влияние на параметры орбиты спутника

Выше нами установлено влияние второй зональной гармоники на параметры орбиты спутниковых часов, что позволило определить дополнительное изменение основной составляющей релятивистского смещения. Однако существует еще целый ряд факторов, существенно изменяющих орбиту спутников и, как следствие, величину релятивистских смещений частоты и времени бортовых часов.

Допустимая погрешность в знании большой полуоси круговой орбиты Δa при заданной предельной ошибке вычисления релятивистского смещения определяется вторым членом формулы (75):

$$\delta\tau_P^c = \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2}\left(\tau - \tau_H\right), \tag{95}$$

где $\delta\tau_P^c$ – допустимая ошибка в значении релятивистского смещения бортовой шкалы времени; $\tau - \tau_H = \Delta\tau$ – интервал базового времени, за который накапливается релятивистское смещение $\delta\tau_P^c$.

Из этой формулы для интервала $\Delta\tau$ = 3 суток, $\delta\tau_P^c$ = 3 пс (1 пс в сутки) находим, что для средневысотной орбиты спутника ГНСС типа ГЛОНАСС, GPS, GALILEO допустимая погрешность составляет $\Delta a \approx 1$ м. Для низкой орбиты типа орбиты МКС при тех же исходных данных имеем $\Delta a \approx 8$ см.

Для оценки влияния различных факторов на размер полуоси круговой орбиты средневысотных и низковысотных спутников воспользуемся результатами работы [16], которые представим в виде таблицы. Исследования искажений орбит средневысотных спутников глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) и низковысотной орбиты МКС в зависимости от возмущающих ускорений проводились на трехсуточном интервале времени.

Таблица

Влияние различных факторов
на размер полуоси круговой орбиты спутников Земли

Возмущающие факторы	Возмущающие ускорения, м/с^2; Возмущения высоты орбиты, Δa, м	
	Средневысотные орбиты ГНСС	Низковысотные орбиты 350-400 км (МКС)
1. Вторая зональная гармоника потенциала ГПЗ	10^{-4}; ~2000	$2{,}5\cdot10^{-2}$; $\geq10^{4}$
2. Гармоники потенциала ГПЗ высших порядков	10^{-7}-10^{-10}; <200	10^{-5}; ~1000
3. Влияние остаточной атмосферы	~0 ~0	10^{-6}; ~500
4. Сила светового давления от Солнца	10^{-7}; ~100*м/сут*	$6\cdot10^{-8}$; ~50
5. Гравитационное поле Луны	$4\cdot10^{-6}$; <400	10^{-6}; ~15
6. Гравитационное поле Солнца	$2\cdot10^{-6}$; ~200	$2{,}5\cdot10^{-7}$; ~7
7. Смещение полюса Земли	10^{-6}; ~50	$3\cdot10^{-7}$; ~2
8. Прецессия и нутация оси вращения Земли	$2{,}5\cdot10^{-8}$; ≤1	$6\cdot10^{-8}$; --
9. Неравномерность вращения Земли	$3\cdot10^{-9}$; ≤1	$7\cdot10^{-9}$ --
10. Изменение формы Земли из-за приливных воздействий Луны и Солнца	$2\cdot10^{-9}$; --	$1{,}5\cdot10^{-7}$ --
11. Сила светового давления от Земли	$1{,}5\cdot10^{9}$ (*GPS*); --	$4\cdot10^{-9}$ (*МКС*); --
12. Изменение формы Земли из-за смещения полюса	10^{-11}; --	$2\cdot10^{-9}$; --
13. Сила светового и теплового излучения спутника	$1{,}4\cdot10^{-9}$; --	10^{-9}; --
14. Гравитационное поле Венеры	$1{,}1\cdot10^{-10}$; --	$3\cdot10^{-11}$ --

Примечание: наиболее значимыми являются факторы под номерами 1–7, которые вызывают возмущения орбит больше 1 метра. Возмущения от остальных факторов несущественны и помечены прочерками.

Вычисление возмущений от значимых факторов в интересах их компенсации – чрезвычайно трудоемкая и иногда трудноразрешимая задача. Поэтому для релятивистской компенсации воздействия всех перечисленных выше факторов на орбиту КА при решении практических задач необходим иной путь. Наиболее целесообразным является путь численного их интегрирования по текущим измерениям ρ_C, V_C в соответствии с формулой для основного релятивистского смещения (38).

7. Методы релятивистской синхронизации часов в системе «космос – Земля»

7.1. Вариант синхронизации № 1

При наличии на борту спутника стандарта частоты и времени с нестабильностью не лучше 10^{-14} нет необходимости учитывать меньшие по величине релятивистские составляющие смещений наземных и бортовых часов. В этом случае, как следует из проведенного выше исследования, из значимых релятивистских эффектов достаточно учесть лишь эффект «эллиптичности» и эффект влияния второй зональной гармоники гравитационного потенциала, определяемой сплюснутостью Земли в направлении полюсов. Поэтому основой для решения задачи синхронизации является формула (75), которую представим в следующей форме:

$$\Delta\tau_P^c = \tau_C - \tau = \frac{1}{c^2}\left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} + \frac{3\mu_e \Delta a}{2c^2 a_0^2}\right)(\tau - \tau_H) + \Delta\tau_P^{эл} + \delta\tau_P^{n2}, \qquad (96)$$

где $\Delta a = a - a_0$; Φ_0 − потенциал в точке размещения наземных часов, который определяется формулой (16); «эллиптическая» составляющая релятивистского смещения времени $\Delta\tau_P^{эл}$ определяется в формах (27), (34), (35); смещение $\delta\tau_P^{n2}$, вызванное влиянием второй зональной гармоникой через потенциал и через искажение орбиты, − в виде (73).

В полученной формуле выражение в скобках – величина постоянная, два последних члена – величины переменные. Вводя в эту формулу постоянную корректирующую поправку по частоте для задающего генератора бортовых часов $\Delta f_P^{k=}$ и корректирующую поправку в бортовую шкалу времени $\Delta\tau_P^{k\approx}$, получаем:

$$\Delta\tau_P^c = \tau_C - \tau = \frac{1}{c^2}\left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} + \frac{3\mu_e \Delta a}{2a_0^2} + \frac{\Delta f_P^{k=}}{f_0}\right)\cdot \qquad (97).$$

$$\cdot(\tau - \tau_H) + \Delta\tau_P^{эл} + \delta\tau_P^{n2} + \Delta\tau_P^{k\approx}.$$

При выполнении условий:

$$\frac{\Delta f_P^{k=}}{f_0} = -\left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} + \frac{3\mu_e \Delta a}{2a_0^2}\right), \tag{98}$$

$$\Delta\tau_P^{k\approx} = -(\Delta\tau_P^{эл} + \delta\tau_P^{n2}) \tag{99}$$

из формулы (97) получаем результат полной компенсации релятивистских смещений времени: $\Delta\tau_P^c = 0$, откуда следует синхронизация спутниковой и наземной шкал времени: $\tau_C = \tau$.

7.2. Вариант синхронизации № 2

Другой вариант реализации релятивистской синхронизации при учете только эффектов «эллиптичности» и потенциала второй зональной гармоники основан на использовании формулы (38), определяющей основной релятивистский сдвиг $\Delta\tau_P^{осн2}$ в форме 2. Добавляя к основному сдвигу $\Delta\tau_P^{осн2}$ релятивистский сдвиг, вызванный непосредственным влиянием потенциала второй зональной гармоники $\Delta\tau_{P\varphi}^{n2}$, получаем другую версию определения релятивистского сдвига часов в системе «космос − Земля»:

$$\Delta\tau_P^c = \Delta\tau_P^{осн2} + \Delta\tau_{P\varphi}^{n2} = \frac{1}{c^2}\left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} + \frac{3\mu_e \Delta a}{2a_0^2}\right)(\tau - \tau_H) + \tag{100}$$

$$+\frac{1}{c^2}\int_\tau \left(\frac{3\mu_e}{2a} - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2}\right) d\tau + \Delta\tau_{P\varphi}^{n2},$$

где $\Delta\tau_{P\varphi}^{n2}$ − релятивистское смещение, определяемое формулой (57). Второй член этой формулы на заданном уровне точности определяет эффект смещения времени, вызванный эллиптичностью орбиты.

Для достижения релятивистской синхронизации в эту формулу необходимо ввести поправку в значение частоты бортового задающего генератора в виде (98), а также поправку в показания бортовой шкалы времени в виде:

$$\Delta\tau_P^{k\approx} = -\frac{1}{c^2}\int_\tau \left(\frac{3\mu_e}{2a} - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2}\right) d\tau - \Delta\tau_{P\varphi}^{n2}. \tag{101}$$

При этих условиях, как и в предыдущем случае, достигается совпадение, т.е. синхронизация спутниковой и базовой шкал времени: $\tau_C = \tau$.

При установке на борту КА стандарта частоты и времени с нестабильностью 10^{-15}-10^{-16} необходим учет и компенсация всех рассмотренных выше «тонких» релятивистских эффектов, вызванных непосредственным влиянием различных возмущающих гравитационных потенциалов, а также влиянием возмущающих факторов на орбиту КА и через нее – на основной релятивистский сдвиг.

Как уже отмечалось, вычисление искажения орбиты от каждого возмущающего фактора – операция чрезвычайно трудная. Поэтому наилучшим образом для решения этой задачи подходит формула (38), в которой релятивистские эффекты, вызываемые искажениями орбиты от всех перечисленных выше факторов, определяются всего одной операцией: путем численного интегрирования по текущим параметрам ρ_C, V_C. Однако при этом к основному релятивистскому смещению, в соответствии с исходной формулой (13), необходимо добавить смещения, вызванные возмущаюшими гравитационными потенциалами:

$$\Delta\tau_P^c = \frac{1}{c^2}\left(\Phi_0 - \frac{3\mu_e}{2a_0} + \frac{3\mu_e \Delta a}{2a_0^2}\right)(\tau - \tau_H) + \\ + \frac{1}{c^2}\int_\tau \left(\frac{3\mu_e}{2a} - \frac{\mu_e}{\rho_c} - \frac{V_c^2}{2}\right) d\tau + \Delta\tau_P^w, \quad (102)$$

где релятивистское смещение $\Delta\tau_P^w$, вызванное возмущающими гравитационными потенциалами, выражается суммой:

$$\Delta\tau_P^w = \sum_{i=2}^{\infty} \Delta\tau_P^{ni} + \Delta\tau_{MS}^c - \Delta\tau_{MS}^0 - \Delta\tau_0^\Omega . \quad (103)$$

Здесь суммой $\sum_{i=2}^{\infty} \Delta\tau_P^{ni}$ обозначена совокупность релятивистских смещений, определяемых неоднородностью гравитационного поля Земли в виде суммы вкладов каждой гармоники разложения потенциала. Конкретные вклады второй, третьей и четвертой зональных гармоник ($i = 2,3,4$) определены выше формулами (57), (60) и (61). Необходимое количество гармоник определяется необходимой точностью учета влияния неоднородности ГПЗ на шкалу бортовых часов; $\Delta\tau_{MS}^c$ – релятивистские смещения бортовых спутниковых часов, вызванные суммарным воздействием лунных и солнечных приливных потенциалов. Определяются формулой (87); $\Delta\tau_{MS}^0$ – релятивистские смещения, вызванные суммарным воздействием лунных и солнечных приливных потенциалов на наземные часы. Определяются формулой (81); $\Delta\tau_0^\Omega$ – релятивистские смещения шкалы времени наземных базовых часов, вызванные неравномерностью вращения Земли. Определяются формулой (94).

8. Выводы

1. Релятивистские смещения времени и частоты спутниковых часов относительно наземных включают следующие составляющие:

- основные, или главные, составляющие взаимного релятивистского смещения собственного времени и частоты спутниковых и наземных часов, определяемые переменными орбитальными параметрами спутника, а также гравитационным потенциалом в точке размещения наземных стационарных часов;
- смещение шкалы собственного времени часов спутника вследствие воздействия неоднородности ГПЗ;
- смещение шкалы собственного времени наземных часов, вызванное приливными потенциалами Луны и Солнца;
- смещение шкалы собственного времени бортовых спутниковых часов, вызванное приливными потенциалами Луны и Солнца;
- смещение времени и частоты задающего генератора наземных часов, вызванное неравномерностью вращения Земли.

2. Основное релятивистское смещение (и постоянная и переменная части) может быть представлено в нескольких формах, которые могут быть удобны при решении различных задач учета и компенсации релятивистских эффектов.

2.1. Представление через истинную и среднюю аномалии. В этом случае смещение включает линейно нарастающую и периодически изменяющуюся, в общем случае несинусоидальную составляющую релятивистского расхождения времени, определяемую степенями эксцентриситета орбиты спутника. В зависимости от размера большой полуоси орбиты спутника линейно нарастающий эффект расхождения бортовой и наземной шкал времени может быть положительным (т.е. бортовые часы идут быстрее наземных, размер полуоси больше $9{,}6\cdot10^6$ м) и отрицательным (бортовые часы отстают, размер полуоси меньше $9{,}6\cdot10^6$ м).

2.2. Представление через эксцентрическую аномалию. В этом варианте представления переменная «эллиптическая» составляющая релятивистского смещения бортового времени выражается через текущую эксцентрическую аномалию или через скалярное произведение радиус-вектора и вектора скорости спутника. Обе формы применимы только для кеплеровского движения и не учитывают возмущения орбиты.

2.3. Представление через текущий радиус-вектор и скорость спутника. Предлагаемая форма учитывает возмущения орбиты спутника, вызванные высшими членами разложения гравитационного поля Земли, влияние полей Луны и Солнца, сопротивление атмосферы, световое давление и др. Ее можно считать универсальной, однако для ее вычисления необходимы данные о текущих значениях радиус-вектора и вектора скорости спутника.

3. Смещение шкалы собственного времени часов спутника вследствие воздействия неоднородности ГПЗ.

3.1. Действие неоднородности ГПЗ на орбитальные часы проявляется двояко:

• во-первых, в виде возмущающего гравитационного потенциала, воздействующего непосредственно на шкалу орбитальных часов;

• во-вторых, в виде воздействия на основную составляющую смещения частоты и времени спутника через изменение орбитальных параметров спутника.

3.2. Суммарное влияние потенциала второй зональной гармоники в разложении потенциала ГПЗ проявляется в виде линейно нарастающей и периодической составляющей смещения шкалы бортового времени. При этом частота периодической составляющей в два раза выше частоты обращения спутника по орбите (среднего движения). Релятивистский эффект смещения бортового времени за счет изменения высоты орбиты в 7 раз больше, чем эффект непосредственного воздействия потенциала второй зональной гармоники на бортовые часы. Постоянная составляющая релятивистского частотного смещения бортового задающего генератора за счет второй зональной гармоники для орбиты ГЛОНАСС достигает $7{,}2 \cdot 10^{-15}$, амплитуда переменной составляющей – 7 пс. Величина обеих составляющих уменьшается с высотой и существенно зависит от наклонения орбиты. Эффекты воздействия третьей и последующих зональных гармоник на порядок меньше.

4. Приливные лунно-солнечные релятивистские смещения частоты и времени спутниковых и наземных часов.

4.1. Приливные смещения времени наземных СЧВ. Набег длиннопериодного релятивистского приливного смещения времени для поля Солнца на интервале около 40 суток (примерно четверть периода) превышает 40 пс, для Луны на интервале в трое суток достигает 10 пс.

4.2. Приливные релятивистские смещения спутниковых часов. Приливный релятивистский сдвиг бортовой шкалы времени имеет линейную составляющую и периодическую с периодом, вдвое меньшим периода обращения спутника по орбите. Для спутников на геостационарной орбите линейный суточный сдвиг бортовой шкалы времени, вызванный влиянием приливных потенциалов Луны и Солнца, достигает 40 пс и 15 пс соответственно.

5. Смещения частоты и времени наземных часов, вызванные неравномерностью вращения Земли.

Наибольший вклад в это смещение вносит девиация модуля угловой скорости Земли. При среднем значении изменения модуля угловой $\Delta\Omega_z = -100 \cdot 10^{-10}$ с$^{-1}$ и интервале интегрирования 3 месяца (квазилинейная часть изменения угловой скорости - примерно четверть периода) эффект смещения шкалы времени наземных часов составляет около 2500 пс.

6. Учет влияния других факторов, влияющих на основной релятивистский эффект, через влияние на параметры орбиты спутника.

Если релятивистское влияние второй и последующих гармоник можно достаточно легко формализовать и использовать для релятивистской синхронизации, то для целого ряда факторов это сделать затруднительно. К наиболее значимым факторам такого рода относятся (по степени убывания влияния): гравитационное поле Луны (возмущения радиус-вектора орбиты ГЛОНАСС 300−400 м); поле Солнца (возмущения до 200 м); высшие гармоники потенциала ГПЗ (до 200 м); сила светового давления Солнца (до 100 м); смещение полюсов Земли (до 50 м). Другие факторы менее значимы.

Поэтому для учета влияния этих факторов наиболее целесообразным является путь численного интегрирования релятивистских эффектов по текущим измерениям радиус-вектора и составляющим скорости спутника.

7. Релятивистская синхронизация часов в системе «космос – Земля» может быть реализована в двух вариантах.

7.1. При наличии на борту спутника стандарта частоты и времени с нестабильностью не лучше 10^{-14} из значимых релятивистских эффектов (кроме основного) достаточно учесть лишь *эффект «эллиптичности» и эффект влияния второй зональной гармоники гравитационного потенциала*.

7.2. При установке на борту КА стандарта частоты и времени с нестабильностью 10^{-15}−10^{-16} необходим учет и компенсация всех рассмотренных выше «тонких» релятивистских эффектов, вызванных непосредственным влиянием различных возмущающих факторов, с помощью *метода численного интегрирования.* Достижимая точность компенсации с помощью такого метода – единицы пикосекунд.

Литература

1. Интерфейсный контрольный документ ГЛОНАСС, редакция 5.1, 2008.30.
2. Интерфейсный контрольный документ ГЛОНАСС с кодовым разделением сигналов, редакция 1.0, 2016.
3. GPS. Интерфейсный контрольный документ (ICD-200C-002, 25.09.97)
4. Cacciapuoti L., Salomon C. Atomic Clock Ensemble in Space //International Symposium on Physical Sciences in Space, Journal of Physics: Conference Series, 2011, v. 327, p. 012049, doi:10.1088/1742-6596/327/1/012049.
5. STE-QUEST A class M mission proposal for Cosmic Vision 2015-2025 [Электронный ресурс]. URL: https://www.google.ru/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&sqi=2&ved=0ahUKEwivq5XDlbnPAhWnCJoKHb7tACoQFggkMAE&url=http%3A%2F%2Fsci.esa.int%2Fscience-e%2Fwww%2Fobject%2Fdoc.cfm%3Ffobjectid%3D49307&usg=AFQjCNGK5Y7RTsmpJguJK1p1dUBOVIrgaA&sig2=11lINJYueF_4f-JuBG-uSw&bvm=bv.134495766,d.bGs(дата обращения 01.11.2016).

6. Фатеев В.Ф., Сысоев В.П. Релятивистские эффекты в мобильных часах // Измерительная техника, 2014, № 8, с. 31-35. V.F.Fateev,V.P.Sysoev. Relativistic Effects on Moving Clocks // Measurement Techniques. November 2014, Volume 57, Issue 8, p 891-897.
7. Фатеев В.Ф., Копейкин С.М., Пасынок С.Л.. Влияние неравномерности вращения Земли на релятивистские смещения частоты и времени наземных атомных часов // Измерительная техника, 2015, № 6, с. 41-45. Fateev V.F., Kopeikin S.M. and Pasynok S.L. Effect of irregularities in the earth's rotation on relativistic shifts in frequency and time of earthbound atomic clocks // Measurement techniques, v. 58, no. 6, September, 2015.
8. Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. −М.: Наука, 1976.
9. Мельхиор П. Земные приливы. Пер. с английского под ред. Н.Н. Парийского.− М.: Мир, 1968, 482 с.
10. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г.С. Нариманова и М.К. Тихонравова.− М.: Машиностроение, 1972, 608 с.
11. Абалакин В.К., Аксенов Е.П. и др. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – М.: Наука, 1971, 584 с.
12. Ashby N. Relativity in the Global Positioning System // Living Revievs in Relativity, 2003, v. 6, p. 1-42.
13. Kouba J. Improved relativistic transformations in GPS // GPS Solutions, 2004, v. 8, p. 170-180.
14 Пасынков В.В. Роль, место и перспективы развития опорных узлов колокации в интересах фундаментального КВО и прикладного КВНО// Материалы пятой Всероссийской конференции «Фундаментальное и прикладное координатно-временное обеспечение (КВНО-2013)», 15-19 апреля. 2013 г., Сборник тезисов докладов, с. 13-15.
15. Всемирное время и координаты полюса. Бюллетень «Е» ГСВЧ, № 153-156, с. 6.
16. Микрин Е.А. и др. Высокоточный прогноз орбит космических аппаратов, анализ влияния различных возмущающих факторов на движение низкоорбитальных и высокоорбитальных КА // Материалы XXI Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам, ГНЦ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2014, с. 77-78.