

УДК 531.5:521.31:524.3.-77

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ГРАВИТАЦИОННОГО
ПОЛЯ ЗЕМЛИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ В КАНАЛЕ «СПУТНИК-
СПУТНИК», ВАРИАНТ «ВЫСОКИЙ-НИЗКИЙ»****А.А. Ключков***Институт астрономии РАН, e-mail:kaa5774@ya.ru*

Изложен алгоритм получения уравнения метода баланса энергий и уравнения поправок при определении поправок ГМЗ

Ключевые слова: гравитационное поле Земли, сенсорные системы, спутниковая навигация, гравитационный градиентометр, звёздные кометы

Проект GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) направлен на создание высокоточной модели статического гравитационного поля Земли с высоким разрешением. Модель представляется через коэффициенты сферических гармоник степени и порядка выше 250, и соответствует коротковолновой его части с пространственным разрешением менее 100 км [1].

Решение этой целевой задачи проекта GOCE основано на совместной обработке измерительной информации следующих сенсорных систем:

- аппаратуры спутниковой навигации (ACH) GPS, осуществляющей наблюдения спутников навигационной системы GPS по линии «спутник-спутник» (hl-SST);
- спутникового гравитационного градиентометра (SGG);
- звездной камеры (Star Tracker).

Эти данные содержат информацию о гравитационном поле Земли почти в глобальном масштабе. Их частотный спектр включает как длинноволновую часть гравитационного поля, определенную по линии «спутник-спутник», так и коротковолновую (высокочастотную) часть, определенную по градиентометрическим измерениям.

Таким образом, общая матрица нормальных уравнений, составленная для определения параметров гравитационного поля Земли, будет включать в себя матрицу нормальных уравнений, составленную для измерений по линии «спутник-спутник» («высокий-низкий»), и матрицу нормальных уравнений, составленную для градиентометрических измерений.

Для определения параметров гравитационного поля Земли по наблюдениям в канале «спутник-спутник» в варианте «высокий-низкий» может быть использован динамический метод космической геодезии, основанный на точном вычислении орбиты спутника с учетом всех возмущений, действующих на него в полете.

Уравнение динамического метода для определения параметров гравитационного поля Земли имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial (CS)_{nm}} \Delta(CS)_{nm} - l_u = v_u, \quad P_u,$$

где u – вид измерений;

$(CS)_{nm}$ – коэффициенты сферических гармоник разложения
геопотенциала в ряд по сферическим функциям;

$\Delta(CS)_{nm}$ – поправки к коэффициентам сферических гармоник;

l_u – свободный член уравнений поправок;

v_u – остаточное уклонение;

P_u – вес измерения.

При этом уравнение наблюдений, используемое в динамическом методе, является линеаризованным. Другими словами, при использовании классических методов обработки (например, метода наименьших квадратов) уравнения наблюдений представляют в виде ряда Тейлора первого порядка. Неучет членов более высокого порядка приводит к появлению ошибок аппроксимации, а это требует использования итерационной схемы решения. Количество итераций будет зависеть от точности начальных значений и нелинейности проблемы. Кроме того, использование динамического метода приводит к значительным вычислительным затратам.

Поэтому в проекте GOCE для определения параметров гравитационного поля Земли помимо динамического метода космической геодезии решено было использовать **метод баланса энергии**, который был разработан в 60-х годах XX столетия и использовался в проекте CHAMP.

В данной статье изложен алгоритм получения уравнения метода баланса энергии и уравнения поправок при определении параметров гравитационного поля Земли по наблюдениям в канале «спутник-спутник» в варианте «высокий-низкий».

В основе метода лежит одна из основных теорем физики – теорема о консервативности энергии: **полная энергия замкнутой механической системы есть величина постоянная**.

Для практической реализации метода баланса энергии необходимы:

1) точная орбита, полученная на основе математической обработки измерений, выполненных с помощью аппаратуры спутниковой навигации (АСН), установленной на борту спутника GOCE;

2) уравнение наблюдений для определения параметров гравитационного поля Земли на основе использования орбитального решения и метода баланса энергии.

При выводе уравнения наблюдения будем исходить из предположения о наличии в нашем распоряжении точной орбиты спутника.

Основными системами координат, которые используются для описания движения спутника и гравитационного потенциала Земли, являются:

- 1) геоцентрическая инерциальная система координат (ECI);
- 2) геоцентрическая земная система координат (ECEF).

1. Вывод уравнения наблюдения для метода баланса энергии

Отправной точкой для составления уравнений наблюдения является уравнение Лагранжа в системе координат ECI, которое записывается следующим образом [2]:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i - V, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия единичной массы;

V – потенциальная энергия единичной массы в физическом смысле.

Знак потенциальной энергии V является противоположным знаку потенциала в геодезическом смысле ($V = -U$).

В системе координат ECEF уравнение (1) может быть записано следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_i &= \vec{v}_e + \vec{\omega} \times \vec{r}_e \\ L &= \frac{1}{2} \cdot \vec{v}_e \cdot \vec{v}_e + \vec{v}_e \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_e) + \frac{1}{2} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_e) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_e) - V \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где $\vec{r}_e, \vec{v}_e$ – вектор положения и скорости спутника в земной системе координат соответственно.

$\vec{v}_i$ – вектор скорости спутника в инерциальной системе координат.

Следующий шаг в получении уравнения наблюдения – преобразование Лагранжа в гамильтониан

$$H = \vec{p}_e \cdot \vec{v}_e - L, \quad (3)$$

где $\vec{p}_e$ – вектор обобщенного момента, определяемый по формуле [3, 4]

$$\vec{p}_e = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_e} = \vec{v}_e + \vec{\omega} \times \vec{r}_e. \quad (4)$$

С учетом (4) уравнение (3) в земной системе координат может быть представлено в следующем виде

$$H = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}_e \cdot \vec{v}_e - \frac{1}{2} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_e) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_e) + V. \quad (5)$$

Второе слагаемое в (5) $\frac{1}{2} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_e) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_e)$ есть центробежный потенциал.

Из уравнения (5) видно, что гамильтониан может быть представлен как общая энергия замкнутой механической системы, который является постоянным при движении этой системы.

Полагая $\vec{v}_e = \vec{v}_i - \vec{\omega} \times \vec{r}_e$, получаем

$$H = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i - \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_e) + V. \quad (6)$$

Используя в (6) циклическую перестановку для смешанного векторного произведения, получаем выражение для гамильтониана в инерциальной системе координат

$$H = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i - \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_e \times \vec{v}_i) + V. \quad (7)$$

Из формулы (7) видно, что при переходе к инерциальной системе координат появляется дополнительный член $\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_e \times \vec{v}_i)$ к простому гамильтониану $H_0 = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + V$, который называется угловым моментом. Этот дополнительный член может быть представлен как кинетическая энергия $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_k$, которая получается путем замены $(\vec{\omega} \times \vec{r}_e)$ на $\vec{v}_k$.

Учитывая все вышеизложенное и полагая, что Земля вращается вокруг полярной оси z с постоянной скоростью, уравнение баланса энергии в земной системе координат с учетом уравнения (5) может быть записано в следующем виде:

$$H = -U(x_e, y_e, z_e) + \frac{1}{2} \cdot \{\dot{x}_e^2 + \dot{y}_e^2 + \dot{z}_e^2\} - \frac{1}{2} \cdot \omega_e^2 \cdot \{x_e^2 + y_e^2\}. \quad (8)$$

В инерциальной системе координат формула (8) будет иметь вид:

$$H = -U(x_e, y_e, z_e) + \frac{1}{2} \cdot \{(\dot{x}_i + \omega_e \cdot y_i)^2 + (\dot{y}_i - \omega_e \cdot x_i)^2 + \dot{z}_i^2\} - \omega_e \cdot \{x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i\}, \quad (9)$$

где H – постоянная энергии;

$x_e, y_e, z_e; \dot{x}_e, \dot{y}_e, \dot{z}_e$ - положение и составляющие вектора скорости спутника в земной системе координат;

$x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ - положение и составляющие вектора скорости спутника в инерциальной системе координат.

В этом уравнении неизвестные H и $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ находятся в левой части уравнения, а компоненты наблюдаемых орбит в инерциальной и земной системах координат – в правой части.

Кроме этого, в отличие от уравнения динамического метода космической геодезии, которое является линеаризованным относительно определяемых гармонических коэффициентов $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$, уравнения (8) и (9) являются линейными относительно определяемых гармонических коэффициентов $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$.

Уравнения (8) и (9) были получены в предположении, что система «спутник-Земля» является замкнутой, однако в действительности она таковой не является, поскольку на спутник помимо гравитационного поля Земли действуют и другие силы, что должно найти отражение и в уравнении баланса энергии.

В уравнения (8) и (9) могут быть добавлены дополнительные члены, учитывающие, например, возмущения третьих тел (Солнца, Луны и планет), приливы (в твердой Земле и океанические) в одном из двух видов: в виде поправок (правая часть уравнения) или в виде неизвестных (левая часть уравнения), диссипацию энергии и т. д.

Поэтому представим уравнения (8) и (9) в схематическом виде:

$$H = -U_{Earth} + V_{kin} + V_{rot} + V_{diss} + V_{Sun} + V_{Moon}. \quad (10)$$

Вычисление всех слагаемых формулы (10) приведены ниже.

2. Гравитационный потенциал Земли

Гравитационный потенциал Земли может быть представлен в виде разложения в ряд по сферическим функциям

$$U_{Earth}(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM_e}{r} + \frac{GM_e}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (11)$$

- | | |
|----------------------------------|---|
| где U_{Earth} | - потенциал Земли; |
| где $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ | - нормализованные коэффициенты разложения потенциала Земли в ряд сферических функций; |
| $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ | - присоединенные функции Лежандра; |
| r, φ, λ | - сферические геоцентрические координаты (радиус-вектор, широта, долгота); |
| GM_e | - геоцентрическая гравитационная постоянная; |

$N_{\max}$ - предельная степень разложения.

Гравитационный потенциал Земли в соответствии с формулой (11) можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$U=U_0+T, \quad (12)$$

где U_0 – потенциал Нормальной Земли;

T - возмущающий потенциал.

В качестве потенциала Нормальной Земли может быть взят потенциал сферы $\left(U_0 = \frac{GM_e}{r} \right)$, однако в геодезической практике в качестве потенциала Нормальной Земли используют потенциал, вычисляемый без учета центробежного потенциала по следующей формуле [5]:

$$U_0 = \frac{GM}{r} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^3 \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n} \cdot J_{2n} \cdot P_{2n}(\cos \theta) \right), \quad (13)$$

где $a_e = 637813664$ м – средний экваториальный радиус Земли;

J_{2n} - четные зональные гармоники геопотенциала;

$P_{2n}(\cos \theta)$ - полиномы Лежандра;

GM - геоцентрическая гравитационная постоянная;

r - радиус-вектор спутника.

С учетом формулы (12) уравнение (10) может быть представлено следующим образом

$$H+T=V_{kin}+V_{rot}+V_{diss}+V_{Sun}+V_{Moon}-U_0. \quad (14)$$

3. Вычисление кинетической энергии

Кинетическая энергия спутника в инерциальной системе координат вычисляется по следующей формуле:

$$V_{kin} = \frac{1}{2} \cdot v_i \cdot v_i = \frac{1}{2} \cdot (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \quad (15)$$

где $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ - составляющие вектора скорости спутника в инерциальной системе координат.

4. Вычисление потенциала вращения V_{rot}

Поскольку теорема о консервативной энергии справедлива только в поле консервативных сил, то для того, чтобы ее можно было применять, необходимо потенциал вращения V_{rot} добавить в уравнение консервативной энергии.

Потенциал вращения V_{rot} вычисляется в каждой точке измерения напрямую по данным вектора состояния спутника в инерциальной системе координат в соответствии с уравнением [6]:

$$V_{rot} = -\omega_e \cdot (x_i \cdot \dot{y}_i - y_i \cdot \dot{x}_i), \quad (16)$$

где ω_e - скорость вращения Земли;

$x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i$ - составляющие положения и вектора скорости спутника в ECI.

5. Приливный потенциал, обусловленный гравитационным воздействием Луны и Солнца

Приливные эффекты, обусловленные гравитационным воздействием Солнца и Луны, являются функциями расстояний до этих светил и широты и долготы спутника и вычисляются в каждой точке измерения (рис. 1):

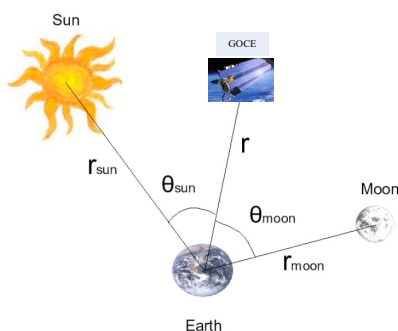


Рис. 1. Углы и расстояния для вычисления V_{Sun} и V_{Moon}

Эти вычисления выполняются по следующим формулам [7]:

$$V_{Sun} = -\frac{k_2}{2} \cdot \frac{Gm_{Sun}}{r_{Sun}^3} \cdot \frac{a_e^5}{r^3} \cdot ((3 - 15 \cdot \cos^2(\theta_{Sun})) + 6 \cdot \cos(\theta_{Sun})), \quad (17)$$

$$V_{Moon} = -\frac{k_2}{2} \cdot \frac{Gm_{Moon}}{r_{Moon}^3} \cdot \frac{a_e^5}{r^3} \cdot ((3 - 15 \cdot \cos^2(\theta_{Moon})) + 6 \cdot \cos(\theta_{Moon})), \quad (18)$$

где k_2 - число Лява, которое характеризует эластичность Земли;

a_e - экваториальный радиус Земли;

m_{Sun} , m_{Moon} - масса Солнца и Луны соответственно.

Вычисление негравитационного возмущающего потенциала V_{diss}

Негравитационный возмущающий потенциал V_{diss} можно рассматривать как потенциал диссипации, поскольку на орбиту спутника действуют силы, имеющие негравитационную природу. Одной из таких сил является атмосферное сопротивление. Сила его воздействия зависит от многих параметров, а именно: от солнечной активности, составляющих атмосферы, скорости спутника, высоты его полета, геометрии спутника и положения (ориентации) его на орбите.

Теоретически негравитационный потенциал может быть вычислен в соответствии с формулой [8]:

$$V_{diss} = \int (v \cdot a)_i dt, \quad (19)$$

где v и a - соответственно скорость и ускорение спутника в инерциальной системе координат.

Основная часть негравитационного возмущающего потенциала обусловлена воздействием атмосферного торможения на орбиту спутника. Это воздействие измеряется компонентой вектора ускорения, направленной вдоль орбиты. Поэтому в первом приближении можно записать, что

$$V_{diss} = \int (|v| \cdot a_x)_i dt. \quad (20)$$

Интеграл (19) может быть вычислен с использованием методов численного интегрирования, например, методом Симпсона.

Если по каким-то причинам акселерометрические измерения недоступны, то в этом случае оценка негравитационного возмущающего потенциала V_{diss} может быть выполнена на основе метода, который был применен при обработке измерений датского спутника ORSTED [9].

В результате всех вышеописанных вычислений будем иметь значения гравитационного потенциала на высоте полета спутника во всех точках измерения.

В заключение отметим, что уравнения (10) и (14) являются базовыми уравнениями метода баланса энергии при определении параметров модели гравитационного поля Земли.

Решение этих уравнений можно получить на основе использования нескольких методов:

метода наименьших квадратов;
полуаналитического метода;
метода колокации.

Литература

1. GOCE. Mission Requirements Document. GO-RS-ESA-SY-0001. 2000.
2. Visser P.N.A.M., Sneeuw N., Gerlach C. Energy integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates // Journal of Geodesy, 2003, v. 77, p. 207–216.
3. Landau L.D., Lifschitz E.M., *Mechanik. Band I der Reihe Lehrbuch der Theoretischen Physik.* Akademie-Verlag, Berlin. 1965.
4. Lanczos C. *The variational principles of mechanics.* University of Toronto Press, Toronto. 1949.
5. Torge W. *Geodesy de Gruyter*, 3rd edition. 1999.
6. Jekeli C. The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, p. 85–101, 1999.
7. Seeber G. *Satellite Geodesy. de Gruyter*, 2nd edition, 2003.
8. Howe E. CHAMP satellite gravity field determination by collocation. PhD Thesis. Copenhagen, 2006.
9. Sorensen S. L. S. Orsted as a gravity mission satellite. Master's thesis. Copenhagen, 2006.