

**УДК 536.252**

**МОДЕЛЬ УСТОЙЧИВОЙ СТРАТИФИКАЦИИ ЖИДКОСТИ  
ПРИ УЧЁТЕ ЗАВИСИМОСТИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ  
ПАРАМЕТРОВ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ И СОЛЁНОСТИ**

**А.В. Кистович**

*ФГУП «ВНИИФТРИ», Менделеево, Московская область, e-mail: akist@vniiftri.ru*

*В явном виде представлено решение гидродинамической системы уравнений, определяющее стратифицирующие распределения температуры, солёности и плотности при откате от приближения малых температурных перегревов. Полученные результаты применимы при описании процесса распространения внутренних гравитационных волн, развития конвективных течений, а также динамики технологических процессов в стратифицированных средах.*

*Ключевые слова: стратификация, термодинамические коэффициенты, устойчивость, частота плавуности.*

Одной из важнейших характеристик неоднородной среды является устойчивая стратификация её плотности в поле тяжести Земли при отсутствии вносимых возмущений. Знание исходной устойчивой стратификации необходимо для правильной интерпретации измерительных данных в натуральных и лабораторных условиях. Особую важность наличие адекватной модели стратификации приобретает при проведении экспериментов с внутренними гравитационными волнами и конвективными процессами в жидкости, а также при описании динамики среды в технологических процессах.

Собственно стратифицирующее распределение плотности создаётся стратифицирующими распределениями температуры воды и растворённой в ней соли. Поэтому создание моделей температурного и солевого распределений лежит в основе модели распределения плотности. Стандартный подход при создании таких моделей состоит в исследовании системы фундаментальных гидродинамических уравнений, описывающих эволюцию физических полей среды. В качестве таких физических полей выбираются поле скорости  $\mathbf{v}$  и поля термодинамических переменных  $p$  (давление),  $T$  (температура),  $S$  (солёность) и  $\rho$  (плотность). В результате динамика вязкой жидкости, находящейся в поле силы тяжести, вектор гравитационного ускорения  $\mathbf{g}$  которой направлен против оси  $z$ , описывается набором соотношений [1], включающим в себя второй закон Ньютона для вязкой среды (уравнение Навье-Стокса), уравнение эволюции плотности, уравнения переноса температуры и солёности, а также уравнение состояния, описывающее зависимость плотности от остальных термодинамических переменных (на настоящий момент не имеет фундаментального явного вида):

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right] + \rho g_i,$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = m, \tag{1}$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \rho Q_T \equiv \nabla \cdot (\rho c_p \chi \nabla T) + \rho Q_T,$$

$$\rho \frac{dS}{dt} = \nabla \cdot (\kappa_s \nabla S) + \rho Q_S \equiv \nabla \cdot (\rho k \nabla S) + \rho Q_S,$$

$$\rho = \rho(p, T, S).$$

Здесь:  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$   $\eta, \zeta$  – первая и вторая динамические вязкости;  $\kappa$  ,

$\chi = \kappa / \rho c_p$  – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности;  $\kappa_s, k = \kappa_s / \rho$  – коэффициенты солепроводности и диффузии соли;  $c_p$  – удельная теплоёмкость воды при постоянном давлении;  $Q_T(\mathbf{r}, t), Q_S(\mathbf{r}, t), m(\mathbf{r}, t)$  – источники тепла, соли и массы соответственно.

Исходная устойчивая стратификация представляет собой равновесное состояние среды, которое в поле силы тяжести существует только при отсутствии источников тепла, соли и массы ( $Q_T = Q_S = m = 0$ ) и характеризуется набором равновесных значений физических полей  $\mathbf{v} = 0, p = p(z), T = \tau(z), S = \sigma(z), \rho(z) = \rho(0, \tau(z), \sigma(z))$ .

В общем случае подстановка уравнения состояния в уравнение эволюции плотности приводит к последовательности соотношений:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T,S} \frac{dp}{dt} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,S} \frac{dT}{dt} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{p,T} \frac{dS}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} =$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt} - \alpha \rho \frac{dT}{dt} + \beta \rho \frac{dS}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = m. \tag{2}$$

Здесь  $\frac{1}{c^2} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T,S}$ ,  $c$  – адиабатическая скорость звука;

$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,S}$  – коэффициент объёмного температурного расширения;

$\beta = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{p,T}$  – коэффициент относительного вклада солёности в плот-

ность.

Так как создаваемая здесь модель стратификации предполагает применение при описании конвективных процессов и распространения внутренних гравитационных волн в жидкой среде, то считается, что включение источников тепла, соли и массы не сопровождаются эффективной генерацией акустических волн, что позволяет использовать приближение несжимаемой (по давлению) жидкости, чему формально соответствует предельный переход  $c \rightarrow \infty$ . Тогда уравнение (2) допускает разбиение на два уравнения:

$$\frac{d\rho}{dt} - \alpha \rho \frac{dT}{dt} + \beta \rho \frac{dS}{dt} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \alpha \frac{dT}{dt} - \beta \frac{dS}{dt} + \frac{m}{\rho} = \frac{\alpha}{\rho c_p} \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \frac{\beta}{\rho} \nabla \cdot (\kappa_s \nabla S) + \frac{\alpha Q_T}{c_p} - \beta Q_S + \frac{m}{\rho}.$$

Правая часть второго уравнения системы (3) следует при использовании уравнений переноса температуры и соли системы (1). Полученная пара уравнений (3) эквивалентна паре, составленной из уравнения эволюции плотности и уравнения состояния системы (1).

Именно первое уравнение системы (3) необходимо при создании модели устойчивой стратификации среды. Стандартные подходы к этой задаче используют приближение малых температурных перегревов (переохлаждений) среды и, как следствие, приближение постоянства всех термодинамических коэффициентов. В рамках такого приближения первое уравнение (3) легко интегрируется и задаёт распределение плотности, как функции температуры и солёности, в явном виде

$$\rho = \rho_0 \exp(\beta \sigma(z) - \alpha \tau(z)) \cdot \exp(\beta \tilde{S} - \alpha \tilde{T}), \quad (4)$$

где  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{S}$  – возмущения исходных стратифицирующих распределений  $\tau(z)$ ,  $\sigma(z)$ ,  $\rho_0$  – постоянная величина.

Таким образом, в равновесном состоянии система (1) при замене уже упомянутой пары уравнений на уравнения системы (3) в приближении малых температурных перегревов приобретает вид:

$$\rho(z) = \rho_0 \exp(\beta \sigma(z) - \alpha \tau(z)), \quad \frac{d^2 \tau(z)}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 \sigma(z)}{dz^2} = 0, \quad \frac{d\rho}{dz} = -g \rho(z). \quad (5)$$

Решения двух последних уравнений системы (5)

$$\tau(z) = \tau_0 + G_T z, \quad \sigma(z) = \sigma_0 + G_S z; \quad \tau_0, \sigma_0 = \text{const} \quad (6)$$

задают стратифицирующие распределения температуры и соли. При этом постоянные величины  $G_T$ ,  $G_S$  представляют собой градиенты температуры и солёности в среде. В результате стратифицирующее распределение плотности определяется выражением

$$\rho(z) = \bar{\rho}_0 \exp(-z/\Lambda), \quad \bar{\rho}_0 = \rho_0 \exp(\beta \sigma_0 - \alpha \tau_0)$$

$$\frac{1}{\Lambda} = \alpha G_T - \beta G_S = \frac{1}{\Lambda_T} - \frac{1}{\Lambda_S}, \quad \Lambda_T = \frac{1}{\alpha G_T}, \quad \Lambda_S = \frac{1}{\beta G_S}, \quad (7)$$

где  $\Lambda$ ,  $\Lambda_T$ ,  $\Lambda_S$  – масштабы стратификации плотности, температуры и соли соответственно.

Условие устойчивости стратификации в поле силы тяжести требует уменьшения плотности с ростом координаты  $z$ , что математически означает

$$\frac{d\rho(z)}{dz} < 0, \quad \forall z \sim \Lambda > 0 \Rightarrow \frac{\Lambda_T \Lambda_S}{\Lambda_S - \Lambda_T} > 0. \quad (8)$$

При этом необходимо учитывать тот факт, что как в природных, так и в лабораторных условиях масштабы температурной и солевой стратификаций могут принимать как положительные, так и отрицательные значения (явления инверсии температуры или солёности).

Частота плавучести, определяемая выражением

$$N^2(z) = -g \frac{d}{dz} \ln \rho(z) = \frac{g}{\Lambda}, \quad (9)$$

представляет собой, в данном приближении, постоянную величину.

Как уже оговаривалось выше, соотношения (5 – 8) справедливы при малых температурных перегревах порядка 1..2 градусов. В то же время, в лабораторных экспериментах и технологических процессах исходные перегревы, создающие стратификацию среды, могут достигать десятков градусов. Кроме того, еженедельные натурные измерения [2] частоты плавучести в Мировом океане в рамках проекта «Арго» показывают её существенную зависимость от глубины. Эти факты требуют построения модели исходной устойчивой стратификации при отказе от приближения постоянства термодинамических характеристик среды.

На основании вышесказанного в основу разрабатываемой модели положена система уравнений равновесного состояния среды вида

$$\frac{d\rho}{dt} - \alpha\rho \frac{dT}{dt} + \beta\rho \frac{dS}{dt} = 0, \quad \frac{dp}{dz} = -g\rho(z), \quad (10)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \kappa \frac{dT}{dz} \right) \equiv \frac{d}{dz} \left( \rho c_p \chi \frac{dT}{dz} \right) = 0, \quad \frac{d}{dz} \left( \kappa_s \frac{dS}{dz} \right) \equiv \frac{d}{dz} \left( \rho k \frac{dS}{dz} \right) = 0,$$

причём в общем случае все термодинамические коэффициенты, присутствующие в системе (10), считаются функциями температуры и солёности.

Для того, чтобы приступить к решению системы (10), необходимо, на основании реальных измерительных данных, задаться зависимостями упомянутых коэффициентов от температуры и солёности. Экспериментальные данные [3 – 5] показывают, что характерные параметры среды (кинетические коэффициенты, коэффициенты теплового расширения и т.д.) крайне слабо зависят от солёности, но проявляют чувствительность к температуре. Исключение представляет коэффициент диффузии соли, который зависит как от температуры, так и солёности. Коэффициент  $\beta$  относительного вклада солёности в плотность полагается постоянным, так как его относительные вариации при изменении температуры и солёности крайне малы по сравнению с вариациями измерительных данных, полученных в разных источниках. По той же причине удельная теплоёмкость  $c_p$  считается постоянной (её относительные вариации при изменении температуры и солёности составляют доли процента [5]).

На рис.1 приведены табличные данные (точки) и график аппроксимирующей аналитической зависимости от температуры коэффициента теплопроводности воды при нормальном давлении.

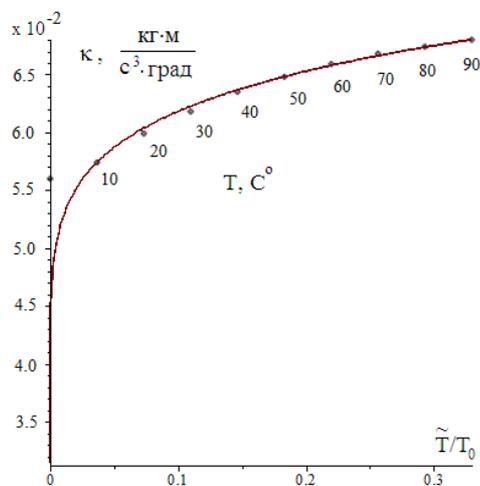


Рис.1. Зависимость коэффициента теплопроводности воды  $K$  от температуры

Аналитическая зависимость, справедливая в диапазоне температур от 5 до 90 °С, описывается соотношением

$$k = k_0 + k_1 y^{k_2}, \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}; \quad k_0 \approx 3.14 \cdot 10^{-2}, \quad k_1 \approx 4.35 \cdot 10^{-2}, \quad k_2 \approx 1.56 \cdot 10^{-1}. \quad (11)$$

Здесь и далее  $y = \tilde{T}/T_0$ . Символом  $T_0$  обозначено реперное значение температуры, в качестве которого принимается величина 273.15 К, символ  $\tilde{T}$  обозначает отклонение температуры в данный момент времени в конкретной точке пространства от реперной температуры, то есть  $\tilde{T} = T - T_0$ , где  $T$  – истинное значение термодинамической температуры.

Максимальная относительная погрешность аппроксимации в описываемом диапазоне температур не превышает  $\delta_k = 10^{-2}$ .

На рис. 2 приведены табличные данные (точки) и график аппроксимирующей аналитической зависимости от температуры коэффициента теплового объёмного расширения воды при нормальном давлении.

Аналитическая зависимость описывается соотношением

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 y^{\alpha_2}, \text{ К}^{-1}; \quad \alpha_0 \approx -1.83 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_1 \approx 1.60 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha_2 \approx 0.54. \quad (12)$$

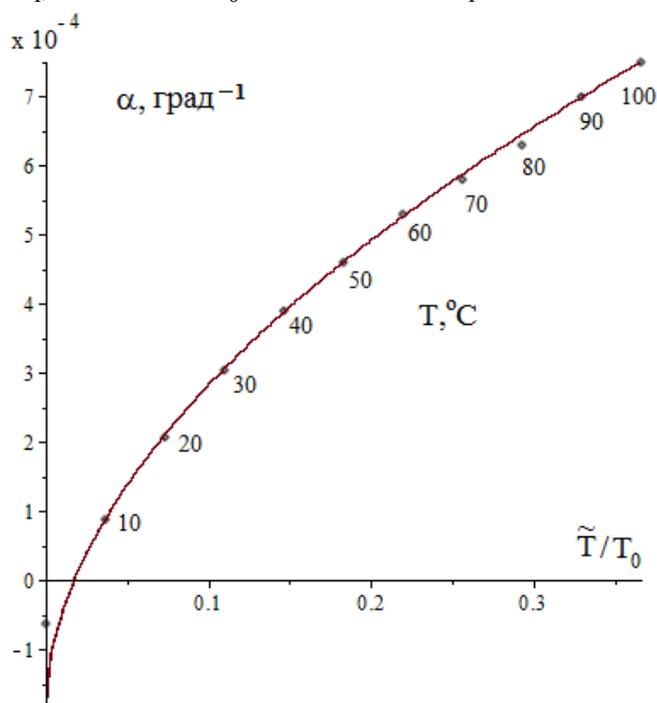


Рис.2. Зависимость коэффициента температурного объёмного расширения воды  $\alpha$  от температуры

Максимальная относительная погрешность аппроксимации в описываемом диапазоне температур не превышает  $\delta_\alpha = 2.5 \cdot 10^{-2}$ .

На рис. 3 приведены табличные данные (точки) и график аппроксимирующей аналитической зависимости от температуры плотности воды при нормальном давлении.

Аналитическая зависимость описывается соотношением

$$\rho = 999.87 \cdot \exp\left(-T_0 \left(\alpha_0 y + \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2} y^{1+\alpha_2}\right)\right), \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (13)$$

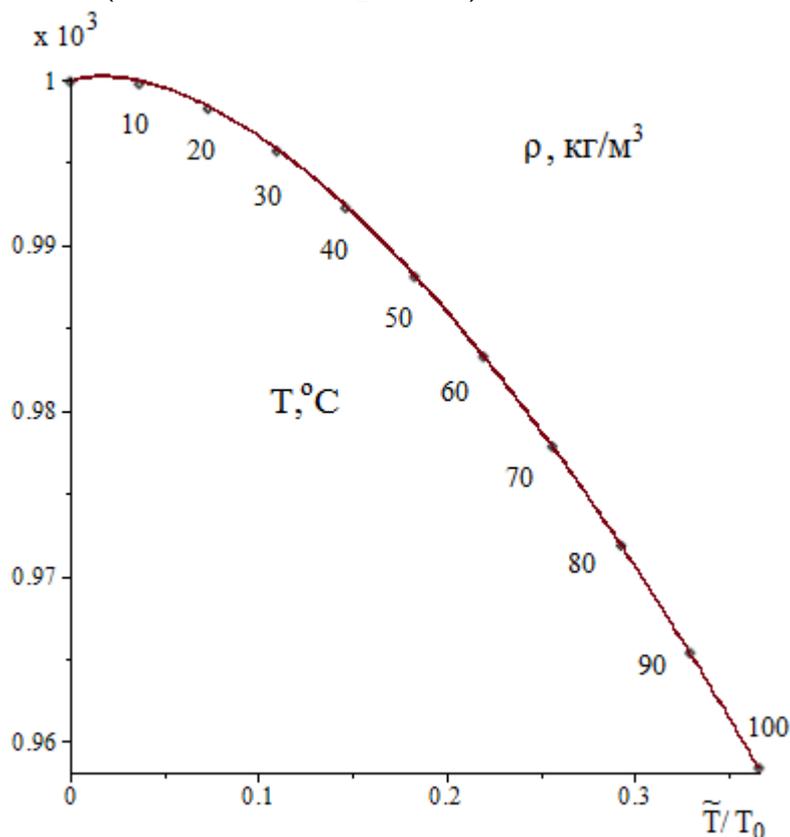


Рис.3. Зависимость плотности воды  $\rho$  от температуры

Максимальная относительная погрешность аппроксимации в описываемом диапазоне температур не превышает  $\delta_\rho = 2 \cdot 10^{-4}$ .

На рис. 4 приведены табличные данные (точки) и график аппроксимирующей аналитической зависимости от температуры коэффициента температуропроводности воды при нормальном давлении.

Аналитическая зависимость описывается соотношением

$$\chi \approx 2.39 \cdot (\kappa_0 + \kappa_1 y^{\kappa_2}) \exp\left(T_0 \left( \alpha_0 y + \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2} y^{1 + \alpha_2} \right)\right) \cdot 10^{-7}, \frac{\text{M}^2}{\text{c}}. \quad (14)$$

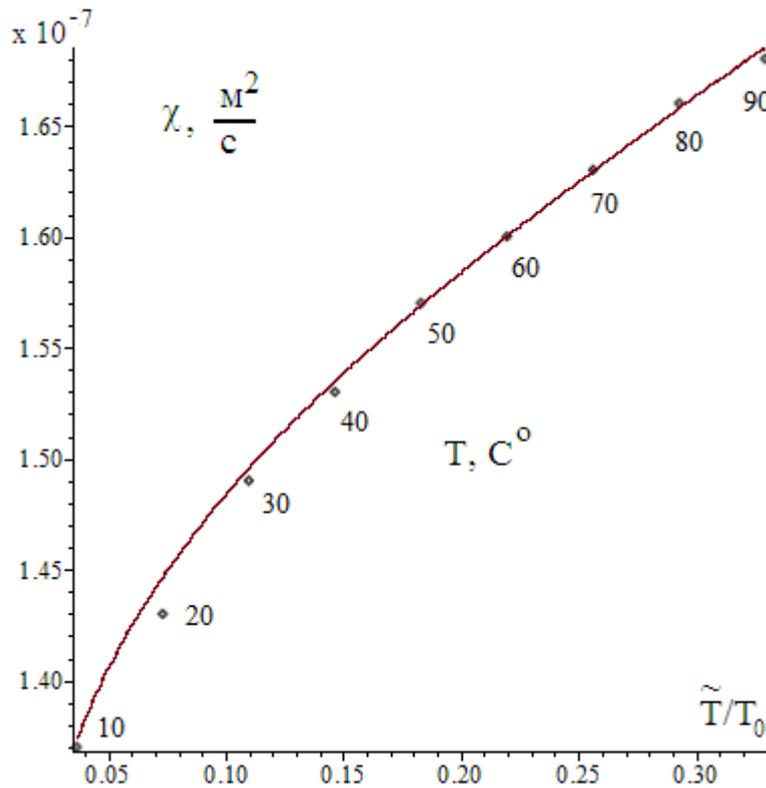


Рис.4. Зависимость коэффициента температуропроводности воды  $\chi$  от температуры

Максимальная относительная погрешность аппроксимации, вычисленная для точки выброса при  $T = 20^\circ\text{C}$ , в описываемом диапазоне температур не превышает  $\delta_\chi = 10^{-2}$ .

Данная зависимость (14) в дальнейшем не используется и приведена здесь в качестве доказательства качества и согласованности используемых аппроксимаций, поскольку (14) получена на основе определения  $\chi = \kappa / \rho c_p$ , соотношений (11, 13) и в предположении постоянства удельной теплоёмкости  $c_p$ .

Рисунки, иллюстрирующие сравнение табличных данных и графиков аппроксимирующих аналитических зависимостей от температуры и солёности

коэффициента диффузии соли  $k$  при нормальном давлении, здесь не приводятся по причине их большого количества.

В общем случае зависимость коэффициента диффузии соли от температуры и солёности описывается соотношением

$$k(S, y) = a \cdot b \cdot (1 + py)(1 + q\beta S) \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}. \quad (15)$$

Значения параметров  $a$ ,  $p$  и  $b$ ,  $q$  приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

Таблица 1

Значения коэффициентов  $a$ ,  $p$  в аппроксимационных формулах

$S, ‰$	0	2	4	6	8	10	15	20	25
$a$	0.374	0.6	0.59	0.63	0.65	0.68	0.74	0.81	0.86
$p$	3.64	1.52	1.56	1.444	1.40	1.32	1.22	1.12	1.08

Таблица 2

Значения коэффициентов  $b$ ,  $q$  в аппроксимационных формулах

$T, ^\circ\text{C}$	18	25	40	60
$b$	1.15	1.44	1.94	2.57
$q$	0.0111	0.0046	0.0034	0.0052

Теперь, после того как определены необходимые зависимости термодинамических параметров среды от температуры и солёности, необходимо найти решение системы (10). Так как коэффициент объёмного температурного расширения  $\alpha$  зависит от температуры, то решение первого уравнения системы (10) имеет вид

$$\rho(T, S) = \rho_0(T_0, S_0) \exp \left( \beta \tilde{S} - \int_{T_0}^{T_0 + \tilde{T}} \alpha(T) dT \right), \quad (16)$$

где  $T_0$  – реперная температура,  $S_0$  – некоторая реперная солёность среды (в качестве которой обычно принимается средняя солёность), такая, что полная солёность  $S$  определяется выражением  $S = S_0 + \tilde{S}$ , причём  $\tilde{S}$  – возмущение солёности.

Равновесное состояние стратифицированной среды определяется следующими соотношениями:

$$\mathbf{v} = 0, \quad \tilde{T} = \bar{T} - T_0 + \tau(z), \quad \tilde{S} = \sigma(z), \quad p = p(z). \quad (17)$$

Здесь  $\bar{T}$  – средняя температура воды,  $\tau(z)$   $\sigma(z)$  – стратифицирующие распределения температуры и солёности соответственно.

В результате система (10) редуцируется к форме

$$\frac{d}{dz} \left( \kappa(\tau(z)) \frac{d\tau(z)}{dz} \right) = 0, \quad \frac{d}{dz} \left( \rho(\tau(z), \sigma(z)) k(\tau(z), \sigma(z)) \frac{d\sigma(z)}{dz} \right) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho(\tau(z), \sigma(z)).$$

Сначала решается первое уравнение системы (18). Для удобства дальнейших выкладок вводится величина  $\theta(z) = \frac{\tilde{T}}{T_0} = \frac{\bar{T} - T_0}{T_0} + \frac{\tau(z)}{T_0}$ . Подстановка в (18) выражения (11) для коэффициента теплопроводности и интегрирование первого уравнения (18) порождают уравнение для функции  $\theta(z)$ :

$$\theta(z) + \frac{\kappa_1}{\kappa_0(1 + \kappa_2)} \theta(z)^{1+\kappa_2} = Az + B, \quad (19)$$

где  $A, B$  – некоторые постоянные величины.

Точное аналитическое решение уравнения (19) при произвольных значениях коэффициентов  $\kappa_i$  недостижимо, однако для реальных сред, когда справедливы значения упомянутых коэффициентов, приведённых в (11), уравнение (19) сводится к виду

$$\frac{4\kappa_1}{\kappa_0(1 + \kappa_2)} \theta(z)^{2+\kappa_2} = (Az + B)^2 \quad (20)$$

с относительной погрешностью, не превышающей  $10^{-3}$ .

В качестве реперной точки для стратифицирующего распределения температуры выбирается  $z = 0$  и при этом полагается, что  $\tau(0) = 0$ . Такое задание реперной точки определяет величину постоянной  $B$  соотношением

$$B^2 = \frac{4\kappa_1}{\kappa_0(1 + \kappa_2)} \left( \frac{\bar{T} - T_0}{T_0} \right)^{2+\kappa_2},$$

в результате чего уравнение (20) приобретает вид

$$\theta(z)^{2+\kappa_2} = \left( \frac{\bar{T} - T_0}{T_0} \right)^{2+\kappa_2} \left( \frac{A}{B} z + 1 \right)^2.$$

Отношение  $A/B$  заменяется выражением вида  $\lambda_T / \Lambda_T$ , где  $\Lambda_T > 0$  –

масштаб температурной стратификации,  $\lambda_T = \pm 1$ . Выбор конкретного знака коэффициента  $\lambda_T$  определяется устойчивостью стратификации плотности среды и осуществляется позже, после определения вида функции  $\sigma(z)$ , поскольку на устойчивость стратификации плотности влияют как температурная, так и солевая стратификации.

Окончательное выражение для распределения функции  $\theta(z)$  имеет вид

$$\theta(z) = \frac{\bar{T} - T_0}{T_0} \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad \gamma = \frac{\kappa_2}{2} \approx 0.078. \quad (21)$$

Из (21) определяется и стратифицирующее распределение температуры

$$\tau(z) = (\bar{T} - T_0) \left[ \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} - 1 \right]. \quad (22)$$

Для того чтобы воспользоваться вторым уравнением системы (10), необходимо сначала на основании (16) определить вид выражения для плотности.

$$\begin{aligned} \rho(\tau(z), \sigma(z)) &= \rho_0(T_0, S_0) \exp \left( \beta \sigma(z) - \int_{T_0}^{\bar{T} + \tau(z)} \alpha(T) dT \right) = \\ &= \rho_0(T_0, S_0) \exp \left( \beta \sigma(z) - T_0 \int_0^{\theta(z)} (\alpha_0 + \alpha_1 y^{\alpha_2}) dy \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Вычисление интеграла, входящего в (23), даёт результат

$$T_0 \int_0^{\theta(z)} (\alpha_0 + \alpha_1 y^{\alpha_2}) dy = m \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} + n \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{\delta}{1+\gamma}}, \quad (24)$$

где  $m = \alpha_0(\bar{T} - T_0)$ ,  $n = \frac{\alpha_1 T_0}{1 + \alpha_2} \left( \frac{\bar{T} - T_0}{T_0} \right)^\delta$ ,  $\delta = 1 + \alpha_2$ .

Подстановка (24) во второе уравнение системы (18) порождает уравнение для стратифицирующего распределения солёности

$$(1 + q \beta \sigma(z)) \exp(\beta \sigma(z)) \frac{d}{dz} \beta \sigma(z) =$$

$$\exp \left( m \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} + n \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{\delta}{1+\gamma}} \right)$$

$$= A \frac{1}{1 + p \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}}, \quad (25)$$

где  $A$  – некоторая постоянная,  $p = \frac{\bar{T} - T_0}{T_0} b$ .

Пусть  $f(z) = \beta \sigma(z)$ . Интегрирование (25) приводит к результату

$$(1 + q(f - 1)) \exp(f) = AI(z) + B, \quad (26)$$

где  $A, B$  – некоторые постоянные, а функция  $I(z)$  имеет вид

$$I(z) = \int \frac{\exp \left( m \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} + n \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{\delta}{1+\gamma}} \right)}{1 + p \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}} dz. \quad (27)$$

Решение функционального уравнения (26) записывается в форме

$$f = W \left( \frac{e^{\frac{1-q}{q}} (AI(z) + B)}{q} \right) - \frac{1-q}{q}, \quad (28)$$

где  $W(x)$  – функция Ламберта [6], определяемая как решение уравнения  $W(x) \exp(W(x)) = x$ . Эта функция хорошо изучена и табулирована и в настоящее время включена в совокупность специальных функций математической физики.

В качестве реперной точки для распределения соли, как и для температурного распределения, выбирается  $z = 0$ . При этом  $f(z) = \beta \sigma$ ,  $(z) = 0$ . Тогда из (28) следует  $B = 1 - q - AI(0)$ . Согласно определению, функция  $f$  определяет структуру солевой стратификации, которая выступает в роли независимой термодинамической переменной. В изотермическом слу-

чае ( $\Lambda_T \rightarrow \infty$ ) из (27) следует  $I(z) = \frac{e^{m+n}}{1+p} z$ . Тогда в качестве  $A$  выбира-

ется величина  $A = \frac{\lambda_S}{\Lambda_S} (1+p) e^{-m-n}$ , где  $\Lambda_S$  – характерный масштаб солевой стратификации,  $\lambda_S = \pm 1$ .

Правило выбора конкретного значения  $\lambda_S$  определяется устойчивостью стратификации плотности и будет представлено в явном виде далее.

Окончательно распределение солевой стратификации имеет вид

$$\beta \sigma(z) = W \left( \frac{e^{\frac{1-q}{q}} \left( \frac{\lambda_S}{\Lambda_S} J(z) + 1 - q \right)} \right) - \frac{1-q}{q}, \quad (29)$$

где

$$J(z) = \int_0^z \frac{\exp \left( m \left( \lambda_T \frac{x}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} + n \left( \lambda_T \frac{x}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{\delta}{1+\gamma}} \right)}{1 + p \left( \lambda_T \frac{x}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}} dx. \quad (30)$$

Использование (23, 24, 29) позволяет записать стратифицирующее распределение плотности среды в виде

$$\rho(\tau(z), \sigma(z)) = \rho_0(T_0, S_0) \exp \left( \beta \sigma(z) - m \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} - n \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{\delta}{1+\gamma}} \right). \quad (31)$$

В роли силы тяжести стратификация среды будет устойчивой, если выполняется условие

$$\frac{d}{dz} \rho(\tau(z), \sigma(z)) < 0, \quad \forall z, \quad (32)$$

что означает уменьшение плотности среды с высотой.

Подстановка в (32) выражений (29, 31) придаёт условию устойчивости явный вид

$$\frac{\lambda_S}{\Lambda_S} \frac{W\left(\frac{e^q}{q} \left(\frac{\lambda_S}{\Lambda_S} J(z) + 1 - q\right)\right)}{\left(1 + W\left(\frac{e^q}{q} \left(\frac{\lambda_S}{\Lambda_S} J(z) + 1 - q\right)\right)\right)} \frac{J'_z(z)}{\left(\frac{\lambda_S}{\Lambda_S} J(z) + 1 - q\right)} - \frac{m\lambda_T}{(1+\gamma)\Lambda_T} \left(\lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1\right)^{-\frac{\gamma}{1+\gamma}} - \frac{n\delta\lambda_T}{(1+\gamma)\Lambda_T} \left(\lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1\right)^{\frac{\delta}{1+\gamma}-1} < 0, \quad \forall z. \quad (33)$$

В изотермическом случае ( $\Lambda_T \rightarrow \infty$ ) вид (33) упрощается

$$\frac{\lambda_S}{\Lambda_S} \frac{1}{\frac{\lambda_S z}{\Lambda_S} + 1 - q} \frac{W\left(k \left(\frac{\lambda_S z}{\Lambda_S} + 1 - q\right)\right)}{1 + W\left(k \left(\frac{\lambda_S z}{\Lambda_S} + 1 - q\right)\right)} < 0, \quad \forall z, \quad k = \frac{e^q}{q}. \quad (34)$$

Так как условие устойчивости должно выполняться для всех  $z$ , то при  $z = 0$  из (34) следует

$$\frac{\lambda_S}{\Lambda_S} \frac{1}{1 - q} \frac{W(k(1 - q))}{1 + W(k(1 - q))} = \frac{\lambda_S}{\Lambda_S} \frac{1}{1 - q} \frac{1 - q}{q} \frac{1}{1 + \frac{1 - q}{q}} = \frac{\lambda_S}{\Lambda_S} < 0. \quad (35)$$

Так как  $\Lambda_S > 0$  по определению, то из (35) следует  $\lambda_S = -1$ .

Применимость условия устойчивости (34) зависит от поведения функции Ламберта  $W(x)$ . Так как эта функция принимает действительные значения

при  $x > -\frac{1}{e}$  и обладает свойством  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}+0} W(x) = -\infty$ , то необходимо

$$k \left(\frac{\lambda_S z}{\Lambda_S} + 1 - q\right) > -\frac{1}{e} \Rightarrow z < \Lambda_S \left(\frac{q}{\frac{1}{e}} + 1 - q\right). \quad (36)$$

С другой стороны, физический смысл налагает требование  $\beta\sigma(z) \geq -S_0$ , которое означает, что полная солёность воды не может принимать отрицательные значения. Как следует из (29), выполнение физического требования обеспечивает выполнение соотношения (36). Этот результат указывает на работоспособность условия (34) во всех физических ситуациях.

В том случае, когда распределение соли равномерно по пространству или совсем отсутствует ( $\Lambda_S \rightarrow \infty$ ), из (33) следует

$$\lambda_T \left[ m + n\delta \left( \lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \right)^{\frac{\delta+2\gamma}{1+\gamma}} \right] > 0, \quad \forall z. \quad (37)$$

Так как величины  $m$ ,  $n$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  и  $\Lambda_T$ , входящие в выражение (37), положительны, то  $\lambda_T = 1$ .

Применимость условия (37) ограничено требованием

$$\lambda_T \frac{z}{\Lambda_T} + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad z \geq -\Lambda_T. \quad (38)$$

Но нарушение условия (38) означает, что температура воды ниже точки замерзания, следовательно, работоспособность соотношения (37) простирается на весь диапазон существования воды в жидкой фазе.

Выражение, стоящее в левой части неравенства (33), есть ничто иное, как величина  $\frac{d}{dz} \ln \rho(\tau(z), \sigma(z))$ . Как уже говорилось ранее, важной характеристикой стратифицированных сред является частота плавучести (частота Вейселя-Брента), определяемая соотношением

$$N^2(z) = -g \frac{d}{dz} \ln \rho(\tau(z), \sigma(z)), \quad (39)$$

где  $g$  – гравитационное ускорение.

Таким образом, выражение (33) позволяет определить не только устойчивость стратификации среды, но и зависимость частоты плавучести от глубины.

В случае морской среды, ниже уровня приповерхностного термоклина, когда реальные масштабы стратификации температуры и солёности существенно превышают глубину моря, т.е. выполняются соотношения,  $|z/\Lambda_T| \ll 1$ ,  $|z/\Lambda_S| \ll 1$ , условие (33) устойчивости стратификации плотности приобретает вид

$$\frac{\lambda_S}{\Lambda_S} - \frac{\lambda_T}{\Lambda_T} (n\delta + m) \frac{1-q}{1+\gamma} < 0. \quad (40)$$

Так как  $n$ ,  $m$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  и  $1-q$  – положительные величины, то выбор  $\lambda_T = 1$ ,  $\lambda_S = -1$  обеспечивает выполнение условия (40). Это соответствует наличию устойчивых как температурной, так и солевой стратификаций. Но устойчивости также можно добиться и при выборе  $\lambda_S = -1$ ,  $\lambda_T = 1$  (случай инверсии солёности, когда солёность растёт с высотой), если справедливо

соотношение  $\frac{\Lambda_T}{\Lambda_S} < (n\delta + m) \frac{1-q}{1+\gamma}$ . Устойчивость также имеет место и при

$\lambda_T = -1$ ,  $\lambda_S = -1$  (случай инверсии температуры), если выполняется неравенство  $\frac{\Lambda_T}{\Lambda_S} > (n\delta + m) \frac{1-q}{1+\gamma}$ . Абсолютная неустойчивость стратификации

плотности наблюдается при  $\lambda_T = -1$ ,  $\lambda_S = 1$ . Как показывают натурные наблюдения, первые три случая имеют место в природных системах, а последний не наблюдается, в полном соответствии с условием устойчивости (33).

### Заключение

В работе решена задача об устойчивой стратификации плотности в среде, термодинамические параметры которой зависят от температуры и солёности. Получены распределения температурной и солевой стратификаций. В предельном случае больших масштабов стратификаций температуры и солёности получены результаты, совпадающие с наблюдаемыми в природе. Полное условие устойчивости (33) позволяет определять равновесное состояние среды и в случае резких стратификаций, характерных для лабораторных экспериментов и технологических процессов.

### Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. - М.: Наука, 1986, 736 с.
2. [http://rus.ferhri.ru/argo/index\\_r.htm](http://rus.ferhri.ru/argo/index_r.htm),  
<http://ocean.extech.ru/ioc/programs/argo.php>.
3. Краткий справочник физико-химических величин. Издание десятое, испр. и дополн. / Под ред. А.А. Равделя и А.М. Пономаревой. - СПб.: Иван Федоров, 2003, 232 с.
4. Бретшнайдер С. Свойства жидкостей и газов. - М., Л.: Химия, 1966, 410 с.

5. Океанология. Физика океана. Т. 1. Гидрофизика океана / Под ред. В.М. Каменковича, А.С. Моница. - М.: Наука, 1978, 456 с.
6. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function // *Advances Computational Maths.*, 1996, v. 5, p. 329–359.