УДК 006.92:521.9

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ АКСИОМЫ СТО И УРАВНЕНИЯ ЛОРЕНЦА ДЛЯ 3D-СЛУЧАЯ

И.В. Безменов, И.Ю. Блинов

ФГУП «ВНИИФТРИ», Менделеево, Московская обл.

bezmenov@vniiftri.ru, blinov@vniiftri.ru

Альтернативные аксиомы СТО (без второго постулата Эйнштейна), приведенные в [1], в случае одной пространственной переменной, сформулированы для случая трех пространственных переменных. Для двух инерциальных систем отсчета (ИСО), одна из которых движется относительно другой в произвольном направлении, ищутся формулы преобразования для пространственно-временных координат 4-х векторов одного и того же события, регестрируемого наблюдателями, находящихся в этих системах. Из предположений гладкости искомого преобразования (аксиома 1) и постоянстве скорости относительного движения двух свободных частиц в различных ИСО (аксиома 2) доказана линейность преобразования для 3D-случая. Из аксиом о равноправии всех ИСО (аксиома 3) и изотропности пространства (аксиома 4), предполагающих неизменность вида преобразования при согласованных поворотах пространственных координат обеих систем, входящих в группу SO(3), а также при полной пространственной инверсии обеих систем, выводятся уравнения Лоренца. Данная работа расширяет на 3D-случай методы, изложенные в [1], [4-7], где вывод уравнений Лоренца приводится в одномерном случае.

The alternative axioms of STR (without Einstein's second postulate) given in [1] and in the one-space variable case are formulated for the case of three space variables. For two inertial frames of reference (IFR), one of which is moving in an arbitrary direction relative to the other, formulas are sought for the transformation of the space-time coordinates of the four-vectors of the same event recorded by observers in these frames. From the assumptions of the smoothness of the sought transformation (axiom 1) and the invariance of the speed of relative motion of two free particles in different IFR (axiom 2), linearity of the transformation for the 3D case is proved. From the axioms of the equality of all IFR (axiom 3) and the isotropy of space (axiom 4), which assume the invariance of the form of the transformation under consistent rotations of the space coordinates of both frames that belong to the group SO(3) and under total space inversion of both frames, Lorentz equations are derived. This work extends to the 3D case the methods set forth in [1], [4-7] where the Lorentz equations were derived in the one-dimensional case.

Ключевые слова: инерциальная система отсчёта, система координат, измерение времени, событие, преобразования, вектор, система отсчёта.

1. Введение

Изучение характеристик пространства-времени на современном уровне невозможно без учета релятивистских эффектов, в частности без применения принципов специальной теории относительности (СТО) А. Эйнштейна. Вот уже более ста лет не прекращаются связанные с этой теорией дискуссии. В чем причина такого неоднозначного восприятия теории? Все дело, конечно, в постулатах, положенных в ее основу. Их всего два. Сам Эйнштейн сформулировал их впервые в 1905 г. (см. [2]). Не приводя их здесь дословно, скажем лишь, что в Первом постулате (который называют принципом относительности) утверждается равноправие всех ИСО, а Второй гласит, что “Каждый луч света движется в “покоящейся” системе координат с определенной скоростью *c* независимо от того, испускается ли он покоящимся или движущимся телом”.

Сам по себе Второй постулат является достаточно “безобидным”. Эфирные теории как раз предполагали наличие такой покоящейся системы (ruhenden Koordinaten system, по Эйнштейну). При этом проводилась аналогия с распространением звука в воздухе. Если наблюдатель неподвижен относительно воздуха, то скорость звука для него постоянна и не зависит от скорости источника звука. Существенным здесь является выделенность системы отсчета, связанной со средой. В любой другой системе скорость звука будет иной, зависящей от направления распространения звука.

Таким образом, ключевым в аксиоматике Эйнштейна является объединение второго постулата и принципа относительности. Это приводит к совершенно новому и очень сильному утверждению: “Скорость света одинакова во всех системах отсчета”. То есть независимо от того, каким образом световой импульс был создан, измерение его скорости различными наблюдателями (движущимися относительно друг друга) будет приводить к одному и тому же значению.

Этот постулат противоречит “классической интуиции”, воспитанной на галилеевом законе сложения скоростей. Поэтому ряд исследователей (Ритц и др., см., напр., книгу В.Паули [3]) пытались отказаться от принципа постоянства скорости света и, опираясь только на принцип относительности, построить теорию, согласующуюся с экспериментом. Однако при этом возникли трудности, преодолеть которые оказалось возможным, только признав принцип постоянства скорости света.

Метод, изложенный в 1910 г. в работах русского ученого В.С. Игнатовского [4], [5], продемонстрировал избыточность постулата инвариантности скорости света и показал, что его выполнения не требуется для вывода преобразований Лоренца. К аналогичному результату пришли Франк и Роте (см. [7]) в 1911 г.

Данные выводы на 100 лет были преданы забвению по одной причине, что они не давали *числового значения* для входящего в них параметра, называемого *фундаментальной скоростью*.

Приведенный в [1] вывод С.С. Степанова переоткрывает заново (см. [6]) метод Игнатовского. При этом было показано, что: 1) для фундаментальной скорости справедлив принцип независимости ее от выбора системы отсчета и 2) скорость любого материального объекта всегда меньше фундаментальной скорости в любой системе отсчета. Эти основополагающие свойства выводятся из полученной функциональной зависимости преобразования между наблюдателями двух ИСО и не зависят от конкретного числового значения фундаментальной скорости. Тот факт, что в нашем мире, как подтвердили многочисленные эксперименты, значение фундаментальной скорости оказалось равно именно скорости света в вакууме, можно рассматривать как некоторое совпадение, причина которого пока не ясна.

Таким образом, как показано в [4], [5], [7] и [1], Второй постулат Эйнштейна может быть *выведен* из первого постулата о равноправии всех инерциальных систем отсчета и постулата об *изотропности* пространства, и, следовательно, закон постоянства скорости света, столь неоднозначно воспринимаемый исследователями, является *математическим следствием* из вполне понятных аксиом, а не физическим свойством “пустого” пространства и электромагнитного излучения.

В данной работе мы приводим вывод уравнений Лоренца для общего трёхмерного случая из альтернативных аксиом СТО, обобщая, таким образом, изложенный в [1] результат.

2. Инерциальные системы отсчёта. Событие

Система отсчета представляет собой некоторое материальное тело, выбираемое в качестве начала этой системы, способ определения положения объектов относительно начала системы отсчёта и способ измерения времени. Обычно различают системы отсчета и системы координат. Добавление процедуры измерения времени к системе координат «превращает» её в систему отсчёта.

Инерциальная система отсчета (ИСО) – это такая система, относительно которой объект, не подверженный внешним воздействиям, движется равномерно и прямолинейно. Постулируется, что ИСО существуют, и любая система отсчёта, движущаяся относительно данной инерциальной системы равномерно и прямолинейно, также является ИСО.

Событием называется любой физический процесс, который может быть локализован в пространстве и имеющий при этом очень малую длительность. Другими словами, событие полностью характеризуется *координатами* (x, y, z) и *моментом времени* t. Примерами событий являются: вспышка света, положение материальной точки в данный момент времени и т. п.

Обычно рассматриваются две инерциальные системы отсчета S *и* S'. Время и координаты некоторого события, измеренные относительно системы S, обозначаются как (t, x, y, z), а координаты и время этого же события, измеренные относительно системы S', как (t', x', y', z'). Удобно считать, что координатные оси систем параллельны друг другу, и система S'

движется вдоль оси x системы S со скоростью $\boldsymbol{v}$, но мы будем рассматривать также и случай, когда вектор $\boldsymbol{v}$ скорости движения S' относительно S имеет *произвольное* направление. Одна из особенностей движения в этом случае заключается в том, что ортогональность осей подвижной системы отсчета относительно наблюдателя в неподвижной нарушается и, как следствие, параллельность соответствующих осей пространственных координат обеих систем невозможна.

3. Преобразования Лоренца и альтернативные аксиомы СТО

Центральное место в специальной теории относительности занимают *преобразования Лоренца*, которые позволяют преобразовывать пространственно-временные координаты событий при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Как уже говорилось выше, данные преобразования выводят, как правило, из двух постулатов: “принципа относительности” и “принципа постоянства скорости света”. Здесь мы остановимся на другом способе вывода уравнений Лоренца, опирающемся на альтернативном наборе аксиом без Второго постулата Эйнштейна (см. [1], [4-7]). В отличие от упомянутых работ мы излагаем здесь общий многомерный случай. Обычная практика состоит в получении результата в простейшем одномерном случае и далее с помощью «очевидных» рассуждений – переносе его на многомерный. Однако строгое рассмотрение показывает неочевидность такого переноса и наличие в его обосновании пробелов. В нашем случае мы постараемся избежать такого рода пробелов.

Пусть начало системы S' движется со скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно инерциальной системы S (рис. 1). Будем считать, что:

a) для каждого из наблюдателей в S и S' пространство является евклидовым размерности 3;

b) для каждого из наблюдателей в S и S' положение точек в пространстве определяется в декартовой системе координат;

c) для наблюдателей обеих систем единицы времени и длины согласованы (см. [1], гл. 1);

d) если для наблюдателя в S компоненты скорости $\boldsymbol{v}$ равны $\{v_1, v_2, v_3\}$, то для наблюдателя в S' компоненты скорости начала S равны $\{-v_1, -v_2, -v_3\}$;

e) начала систем S и S' *согласованы*, т.е. точки ($\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, t=0) и ($\boldsymbol{x}'=\mathbf{0}$, t'=0) совпадают в обеих системах отсчета;

f) направления осей декартовых систем координат S и S' *взаимно согласованы*.

Последний пункт требует пояснений. Фиксирование компонент

$\{v_1, v_2, v_3\}$ вектора $\boldsymbol{v}$ означает выбор определенной ориентации координатных осей (с точностью до вращения). При фиксированной в пространстве системе S выбор S' еще остается произвольным. В то же время, нам необходимо согласовать взаимные направления осей координат двух систем таким образом, чтобы фиксировать *конфигурацию* S–S'. Смысл такой фиксации имеет два следующих аспекта.

Во-первых, формулы перехода из одной системы отсчета в другую, которые мы собираемся искать, должны быть унифицированными. При произвольном взаимном расположении осей двух систем мы будем получать различные (с точностью до преобразования поворота) формулы.

Во-вторых, мы хотим, чтобы при $v \to 0$ оси обеих декартовых систем в пределе становились бы *сонаправленными*. (Мы не можем потребовать сонаправленности координатных осей систем S и S' при $v > 0$ и при произвольном направлении вектора $\boldsymbol{v}$, т.к. такое требование невыполнимо: с точки зрения неподвижного наблюдателя в S' оси координат системы S *не ортогональны* и наоборот.)

Чтобы фиксировать S' относительно S, выполним следующие построения. Выберем одну из осей координат системы S, не параллельную вектору $\boldsymbol{v}$. Пусть, например, это будет ось OX_1. Проведем через линию OO', соединяющую начала двух систем, и ось OX_1 плоскость π. Поворотом координатных осей системы S' относительно прямой OO' добьемся того, чтобы ось $O'X'_1$ в момент совпадения начал ($\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, t=0) и ($\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}$, t'=0) обеих систем и во все последующие моменты t >0 лежала в плоскости π (для наблюдателя из S). Это однозначно определит положение всех осей пространственных координат в S'.

При таком выборе системы S' направления осей декартовых координат систем S и S' будем называть *взаимно согласованными*.

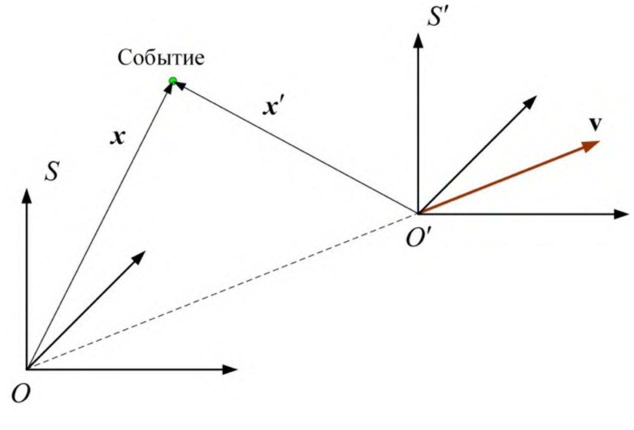

Рис. 1. Событие в «неподвижной» S и «подвижной» S' инерциальных системах отсчета

Пусть $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\boldsymbol{x}'=(x'_1,x'_2,x'_3)$ – радиус-векторы из $\mathbf{R}^3$ в S и S' соответственно и $(\boldsymbol{x},t)$ и $(\boldsymbol{x}',t')$– координаты одного и того же события в этих системах. Обозначим F^{α}(α=1,2,3) и G функции, связывающие результаты наблюдения события в двух системах отсчета:

$$\begin{aligned} x'_1 &= F^1(x_1,x_2,x_3,t;\boldsymbol{v}), \\ x'_2 &= F^2(x_1,x_2,x_3,t;\boldsymbol{v}), \\ x'_3 &= F^3(x_1,x_2,x_3,t;\boldsymbol{v}), \\ t' &= G(x_1,x_2,x_3,t;\boldsymbol{v}). \end{aligned} \tag{1a}$$

Или в векторном виде:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{v}); \quad t' = G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{v}). \tag{1b}$$

Мы будем предполагать выполнение следующих четырех аксиом **A1–A4** (см. для сравнения [1]).

A1. *Преобразования (1) являются непрерывными, дифференцируемыми и взаимно-однозначными, кроме того* $dt'/dt>0$.

Требование взаимной однозначности отображения $(\boldsymbol{x},t)\to(\boldsymbol{x}',t')$ в **A1** означает отличие от нуля якобиана преобразования:

$$J(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{v})=D(\boldsymbol{x}',t')/D(\boldsymbol{x},t)=$$

$$=\begin{vmatrix} \partial F^1/\partial x_1 & \partial F^1/\partial x_2 & \partial F^1/\partial x_3 & \partial F^1/\partial t \\ \partial F^2/\partial x_1 & \partial F^2/\partial x_2 & \partial F^2/\partial x_3 & \partial F^2/\partial t \\ \partial F^3/\partial x_1 & \partial F^3/\partial x_2 & \partial F^3/\partial x_3 & \partial F^3/\partial t \\ \partial G/\partial x_1 & \partial G/\partial x_2 & \partial G/\partial x_3 & \partial G/\partial t \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

причем вектор $\boldsymbol{v}$ рассматривается здесь в качестве параметра.

A2. *Если скорости двух свободных частиц равны в системе S, то они будут равны и в системе S′.*

Данная аксиома используется для обоснования линейности искомых преобразований (1). Доказательство в случае одной пространственной переменной, см., напр., в [1]. Аналогичное доказательство для 3D-случая –

приведено в настоящей работе (см. Дополнение).

А3. *Инерциальные системы отсчета равноправны.*

Требование равноправия всех ИСО в **А3**, в частности, означает, что отображение $(\boldsymbol{x}',t') \to (\boldsymbol{x},t)$ осуществляется по тем же самым формулам (1) с заменой штрихованных переменных на нештрихованные и наоборот, а также с заменой $\boldsymbol{v}$ на $-\boldsymbol{v}$.

А4. *Пространство в инерциальных системах отсчета изотропно.*

Под данным свойством мы будем понимать, что при любых преобразованиях Q поворота, входящих в группу **SO(3)** и согласованно производимых над пространственными координатами в системах S и S', вид преобразований (1) не изменяется при соответствующей замене в них $\boldsymbol{v}$ на $Q\boldsymbol{v}$. Кроме того, мы будем искать решение, для которого вид формул (1) не изменяется и при полной пространственной инверсии координат. Решения, не удовлетворяющие последнему требованию, мы здесь не ищем.

В принципе нет никаких гарантий, что существует хотя бы одно преобразование вида (1), удовлетворяющее перечисленным выше аксиомам **А1**–**А4**. Наша задача – попытаться найти все такие преобразования, если только они существуют.

4. Свойства преобразования $(\boldsymbol{x},t) \to (\boldsymbol{x}',t')$

4.1. Линейность

Наши действия будут заключаться в том, чтобы опираясь на аксиомы **А1**–**А4**, последовательно сужать класс преобразований (1), все более конкретизируя их вид. Первым шагом на этом пути является доказательство линейности функций F^{α} и G по $\boldsymbol{x}$ и t, приведенное в Дополнении (1D-случай рассм. в [1]) и вытекающее из аксиом **А1**, **А2**. Линейность отображения $(\boldsymbol{x},t) \to (\boldsymbol{x}',t')$ означает, что (1) может быть представлено в виде:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}' \\ t' \end{vmatrix} = \mathbb{L} \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} \\ t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}'_0 \\ t'_0 \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

где $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\boldsymbol{v})$ – 4×4 матрица с коэффициентами, зависящими только от $\boldsymbol{v}$, $(\boldsymbol{x}'_0, t'_0)$ – постоянный вектор, не зависящий от $\boldsymbol{x}$ и t, представляющий собой координаты начала (точки $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$) системы S в момент времени $t=0$ в системе отсчета S'. Так как начала обеих систем считаем согласованными, т.е. точки ($\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, $t=0$) и ($\boldsymbol{x}'=\mathbf{0}$, $t'=0$) совпадают в обеих системах отсчета, то $\boldsymbol{x}'_0=0$, $t'_0=0$.

Разделяя пространственную и временную части, перепишем (3) в таком виде:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}' \\ t' \end{vmatrix} = \mathbb{L} \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} \\ t \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbb{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{D}^T & \gamma \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} \\ t \end{vmatrix} \tag{4}$$

или

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,t; \tag{5a}$$

$$t' = \boldsymbol{D}^T \cdot \boldsymbol{x} + \gamma\, t\,, \tag{5b}$$

где $\mathbb{A}$ – 3×3 матрица, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ – векторы из $\mathbf{R}^3$ и γ – скаляр. $\mathbb{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, γ зависят, возможно, только от $\boldsymbol{v}$. Далее, мы установим ряд свойств величин $\mathbb{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, γ.

4.2. Вектор B

Конкретизируем выражение для вектора $\boldsymbol{B}$ в уравнениях (5). В силу согласования начал обеих систем отсчета точка $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ системы S движется относительно S' по траектории: $\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{v}t'$. Подставляя $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ и $\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{v}t'$ в уравнения (5a,b) и исключая переменную t', получаем

$$\boldsymbol{B} = -\gamma \boldsymbol{v}\,, \tag{6}$$

и преобразование (5) принимает вид

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x} - \gamma(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\,t; \tag{7a}$$

$$t' = \boldsymbol{D}^T(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{x} + \gamma(\boldsymbol{v})\,t. \tag{7b}$$

Аналогично, начало системы S' (точка $\boldsymbol{x}'=\mathbf{0}$) движется относительно S по траектории $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}t$. Из (7a) следует:

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = \gamma(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\,. \tag{8}$$

4.3. Поворот пространственных координатных осей

Требования аксиом **А3**, **А4** означают, что вид (7) преобразования из S в S' должен оставаться неизменным при поворотах пространственных осей координат обеих систем.

Осуществим в системе S с неподвижным наблюдателем преобразование Q поворота пространственных осей координат относительно начала – т. О. Новую систему отсчета с повернутыми пространственными осями обозначим $\tilde{S}$. При переходе из S в $\tilde{S}$ матрицы $\mathbf{M}$ и векторы $\boldsymbol{a}$ преобразуются соответственно в $\tilde{\mathbf{M}}$ и $\tilde{\boldsymbol{a}}$ по известным формулам линейной алгебры, а скалярные величины γ остаются без изменения ($\gamma = \tilde{\gamma}$). Поскольку системы отсчета S и $\tilde{S}$ неподвижны друг относительно друга, то время $\tilde{t}$ в $\tilde{S}$ совпадает со временем t в S, т.к. оба значения времени могут быть показаниями одних и тех же часов, расположенных, например, в общем начале двух систем. Таким образом, при переходе из S в $\tilde{S}$ имеем:

$$S \xrightarrow{Q} \tilde{S}: \; \tilde{\mathbf{M}} = Q\mathbf{M}Q^T, \; \tilde{\boldsymbol{a}} = Q\boldsymbol{a}, \; \tilde{\gamma} = \gamma, \; \tilde{t} = t. \tag{9}$$

Здесь мы учли, что Q – ортогональное преобразование и, следовательно, обратное преобразование Q^{-1} всегда существует и определяется транспонированной матрицей: $Q^{-1} = Q^T$ и, следовательно, $Q^T Q = QQ^T = E$, где E – единичная матрица. Обратный переход выполняется по формулам:

$$\tilde{S} \xrightarrow{Q^T} S: \; \mathbf{M} = Q^T\tilde{\mathbf{M}}Q, \; \boldsymbol{a} = Q^T\tilde{\boldsymbol{a}}, \; \gamma = \tilde{\gamma}, \; t = \tilde{t}. \tag{10}$$

Осуществим аналогичное преобразование Q поворота пространственных осей подвижной системы S'. Полученную систему отсчета с преобразованными пространственными осями координат обозначим $\tilde{S}'$. Преобразования матриц, векторных и скалярных величин, включая время, при переходе из S' в $\tilde{S}'$ и обратно осуществляются по формулам, аналогичным (9), (10) (обозначения очевидны):

$$S' \xrightarrow{Q} \tilde{S}': \; \tilde{\mathbf{M}}' = Q\mathbf{M}'Q^T, \; \tilde{\boldsymbol{a}}' = Q\boldsymbol{a}', \; \tilde{\gamma}' = \gamma', \; \tilde{t}' = t'. \tag{9′}$$

$$\tilde{S}' \xrightarrow{Q^T} S': \mathbf{M}' = Q^T\tilde{\mathbf{M}}'Q, \; \boldsymbol{a}' = Q^T\tilde{\boldsymbol{a}}', \; \gamma' = \tilde{\gamma}', \; t' = \tilde{t}'. \tag{10′}$$

Таким образом, мы получили конфигурацию из двух систем отсчета $\tilde{S}$ и $\tilde{S}'$ с вектором скорости относительного движения $\tilde{\boldsymbol{v}}=Q\boldsymbol{v}$ (см. рис. 2).

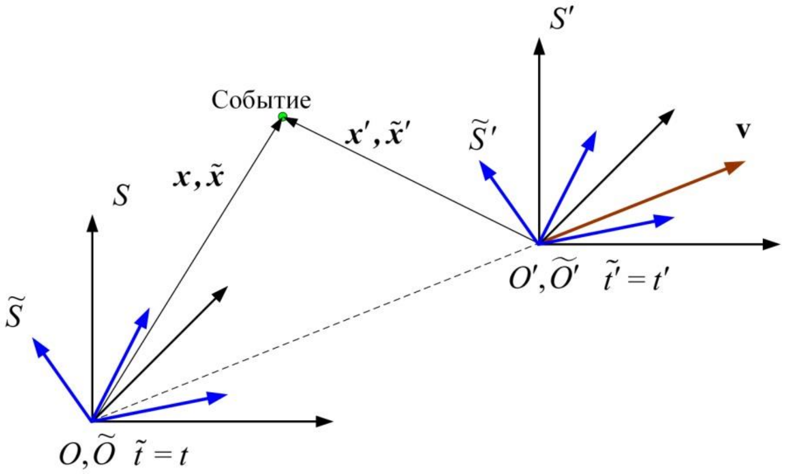

Рис.2. Преобразование поворота систем отсчета S и S'

Найдем взаимосвязь пространственных и временных координат одного и того же события, наблюдаемого в $\tilde{S}$ и $\tilde{S}'$.

Пусть, как и раньше, $(\boldsymbol{x},t)$ и $(\boldsymbol{x}',t')$ – координаты события в системах S и S', а $\boldsymbol{v}$ – скорость движения второй системы относительно первой. В системах отсчета $\tilde{S}$ и $\tilde{S}'$ это же событие будет зарегистрировано с координатами $(\tilde{\boldsymbol{x}},t)$ и $(\tilde{\boldsymbol{x}}',t')$, а скорость относительного движения первой системы относительно второй будет равна $\tilde{\boldsymbol{v}}$, при этом выполнено:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=Q\boldsymbol{x}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}'=Q\boldsymbol{x}', \quad \tilde{\boldsymbol{v}}=Q\boldsymbol{v} \tag{11}$$

и

$$\boldsymbol{x}=Q^T\tilde{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{x}'=Q^T\tilde{\boldsymbol{x}}', \quad \boldsymbol{v}=Q^T\tilde{\boldsymbol{v}}. \tag{12}$$

Взаимосвязь между $(\boldsymbol{x},t)$ и $(\boldsymbol{x}',t')$ определяется равенствами (7). Чтобы получить аналогичные соотношения между $(\tilde{\boldsymbol{x}},t)$ и $(\tilde{\boldsymbol{x}}',t')$, умножим обе части (7.a) на Q слева, а вместо $\boldsymbol{x}$ в уравнения (7.a) и (7.b) подставим $Q^T\tilde{\boldsymbol{x}}$. С учетом (11) после очевидных преобразований получаем:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}' = Q\mathbb{A}(\boldsymbol{v})Q^T\tilde{\boldsymbol{x}} - \gamma(\boldsymbol{v})\tilde{\boldsymbol{v}}\,t; \tag{13a}$$

$$t' = (\boldsymbol{QD}(\boldsymbol{v}))^T \cdot \tilde{\boldsymbol{x}} + \gamma(\boldsymbol{v})\, t. \quad (13b)$$

С другой стороны, согласно нашему предположению (аксиомы **А3**, **А4)**, формулы перехода между $(\tilde{\boldsymbol{x}}, t)$ и $(\tilde{\boldsymbol{x}}', t')$ систем $\tilde{S}$ и $\tilde{S}'$ должны иметь вид, полностью совпадающий с формулами (7) преобразования от $(\boldsymbol{x}, t)$ к $(\boldsymbol{x}', t')$ с теми же самыми матрицей $\mathbb{A}$, вектором $\boldsymbol{D}$ и скаляром γ, в которых значение параметра $\boldsymbol{v}$ заменено на $\tilde{\boldsymbol{v}} = \mathrm{Q}\boldsymbol{v}$:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}' = \mathbb{A}(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{x}} - \gamma(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{v}}\, t; \quad (14a)$$

$$t' = \boldsymbol{D}^T(\tilde{\boldsymbol{v}}) \cdot \tilde{\boldsymbol{x}} + \gamma(\tilde{\boldsymbol{v}})\, t. \quad (14b)$$

Таким образом, формулы (13) и (14) должны выполняться одновременно ***при любом преобразовании Q поворота пространственных осей координат***. Ниже мы будем использовать данный факт (рассматривая частные случаи Q) для дальнейшей конкретизации входящих в эти формулы параметров (см. 4.4 – 4.6).

4.4. Вектор D

Конкретизируем вид вектора $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$. Представим его в виде суммы:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{D}_{\perp}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{D}_{\|}(\boldsymbol{v}), \quad (15)$$

где $\boldsymbol{D}_{\perp}(\boldsymbol{v})$ и $\boldsymbol{D}_{\|}(\boldsymbol{v})$ – составляющие вектора $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$ на направления, перпендикулярное и параллельное вектору $\boldsymbol{v}$ соответственно. Покажем, что $\boldsymbol{D}_{\perp}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$.

В предыдущем разделе мы установили, что формулы (13), (14) должны выполняться для произвольного преобразования Q поворота пространственных осей координат. В частности, эти формулы будут выполнены и в том случае, когда преобразование Q осуществляет поворот векторов в $\mathbf{R}^3$ на произвольный угол φ вокруг прямой, соединяющей начала систем отсчета S и S'. Векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{D}_{\|}(\boldsymbol{v})$ при таком повороте не изменяются:

$$\boldsymbol{QD}_{\|}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{D}_{\|}(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{Qv} = \boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{v}}.$$

Сравнивая правые части (13.b) и (14.b), получаем с учетом (15) и последних равенств:

$$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\perp}(\boldsymbol{v}))^T \cdot \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{D}_{\perp}^T(\boldsymbol{v}) \cdot \tilde{\boldsymbol{x}},$$

откуда в силу произвольности $\tilde{\boldsymbol{x}}$:

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\perp}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{D}_{\perp}(\boldsymbol{v}),$$

т.е. поворот вектора $\boldsymbol{D}_{\perp}$ в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{v}$, на произвольный угол φ не приводит к его изменению. Это возможно в единственном случае, когда $\boldsymbol{D}_{\perp}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$.

Таким образом,

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{D}_{\parallel}(\boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}, \tag{16}$$

где $\lambda(\boldsymbol{v})$ – скаляр.

4.5. Скаляры γ, λ

Правые части (13.a) и (14.a) представляют собой линейные функци t с векторными коэффициентами, тождественно равные друг другу. Отсюда необходимо следует, что

$$\gamma(\boldsymbol{v}) = \gamma(\tilde{\boldsymbol{v}}). \tag{17}$$

Т.к. при преобразовании Q поворота длина вектора $\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}$ остается неизменной ($|\tilde{\boldsymbol{v}}| = |\boldsymbol{v}|$), а изменяться может только направление, то, как видно из (17), $\gamma(\boldsymbol{v})$ не зависит от направления $\boldsymbol{v}$, но может зависеть от $|\boldsymbol{v}|$:

$$\gamma(\boldsymbol{v}) = \gamma(|\boldsymbol{v}|) = \gamma(|v|). \tag{18}$$

С учетом (16), (18) равенства (13), (14) принимают вид

$$\tilde{\boldsymbol{x}}' = Q\mathbb{A}(\boldsymbol{v})Q^T\tilde{\boldsymbol{x}} - \gamma(|v|)\tilde{\boldsymbol{v}}\, t; \tag{19a}$$

$$t' = \lambda(\boldsymbol{v})\tilde{\boldsymbol{v}}^T\tilde{\boldsymbol{x}} + \gamma(|v|)\, t \tag{19b}$$

и

$$\tilde{\boldsymbol{x}}' = \mathbb{A}(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{x}} - \gamma(|v|)\tilde{\boldsymbol{v}}\, t; \tag{20a}$$

$$t' = \lambda(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{v}}^T\tilde{\boldsymbol{x}} + \gamma(|v|)\, t\ . \tag{20b}$$

Сравнивая правые части (19b) и (20b), получаем

$$\lambda(\boldsymbol{v}) = \lambda(\tilde{\boldsymbol{v}}),$$

откуда, как и выше, выводим

$$\lambda(\boldsymbol{v}) = \lambda(|v|)\,. \tag{21}$$

Сравнение правых частей (19a) и (20a) дает (при произвольном $\tilde{\boldsymbol{x}}$):

$$Q\mathbb{A}(\boldsymbol{v})Q^T = A(\tilde{\boldsymbol{v}})\,;\ \tilde{\boldsymbol{v}} = Q\boldsymbol{v}\,. \tag{22}$$

Таким образом, при переходе в систему координат, полученную преобразованием Q поворота исходной системы координат, матрица $\mathbb{A}(\boldsymbol{v})$ преобразовывается по формулам линейной алгебры и совпадает с матрицей $A(\tilde{\boldsymbol{v}})$, в которой $\tilde{\boldsymbol{v}} = Q\boldsymbol{v}$.

Соотношения (19) и (20) в результате сводятся к одним и тем же уравнениям:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}' = \mathbb{A}(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{x}}\ - \gamma(|v|)\tilde{\boldsymbol{v}}\, t\,; \tag{23a}$$

$$t' = \lambda(|v|)\tilde{\boldsymbol{v}}^T\tilde{\boldsymbol{x}} + \gamma(|v|)\, t\,. \tag{23b}$$

Выполнив здесь обратные пространственные повороты систем $\tilde{S}$ и $\tilde{S}'$, мы возвращаемся к формулам (7) (в которых учтены соотношения (16), (18), (21)) для преобразования $(\boldsymbol{x},t) \to (\boldsymbol{x}',t')$:

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}\ - \gamma(|v|)\boldsymbol{v}\, t\,; \tag{24a}$$

$$t' = \lambda(|v|)\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x} + \gamma(|v|)\, t\,. \tag{24b}$$

Разложим здесь $\boldsymbol{x}$ на две составляющие – ортогональную вектору $\boldsymbol{v}$ и параллельную: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\|$. Согласно (8) $\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = \gamma(|v|)\boldsymbol{v}$, откуда следует, что любой вектор, параллельный $\boldsymbol{v}$, преобразуется $\mathbb{A}(\boldsymbol{v})$ в вектор, также параллельный $\boldsymbol{v}$, и равенства (24) приобретают вид:

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}_\perp + \gamma(|v|)\,\boldsymbol{x}_\| - \gamma(|v|)\boldsymbol{v}\, t\,; \tag{25a}$$

$$t' = \lambda(|v|)\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_{\|} + \gamma(|v|)\, t. \tag{25b}$$

Данные соотношения следует рассматривать как одну из форм записи уравнений (24).

4.6. Оператор $\mathbb{A}(\boldsymbol{v})$

Установим ряд дополнительных свойств (наряду с (8)) линейного оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{v})$.

Основной целью данного раздела является доказательство утверждения, что всякий вектор $\boldsymbol{x}_\perp$, перпендикулярный $\boldsymbol{v}$, преобразование $\mathbb{A}(\boldsymbol{v})$ оставляет неизменным:

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}_\perp = \boldsymbol{x}_\perp. \tag{26}$$

Так как нулевой вектор удовлетворяет (26), то ниже мы считаем $\boldsymbol{x}_\perp \neq \boldsymbol{0}$.

Доказательство (26) проведем в два этапа A и B.

(A). Проведем через т. O – начало системы отсчета S – плоскость P, перпендикулярно вектору $\boldsymbol{v}$. Очевидно, $\boldsymbol{x}_\perp \in P$.

Покажем сначала, что действие $\mathbb{A}(\boldsymbol{v})$ на вектор $\boldsymbol{x}_\perp$ сводится к:

a) повороту $\boldsymbol{x}_\perp$ на некторый угол φ_0 в плоскости P относительно т. O и

b) растяжению $\boldsymbol{x}_\perp$ в κ раз:

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}_\perp = \kappa Q_0 \boldsymbol{x}_\perp, \tag{27}$$

где Q_0 – преобразование поворота на угол φ_0; φ_0 и κ не зависят от $\boldsymbol{x}_\perp$.

Действительно, фиксируем $\boldsymbol{x}_\perp$ и обозначим $\boldsymbol{y}$ результат применения оператора $\mathbb{A}(\boldsymbol{v})$ к $\boldsymbol{x}_\perp$:

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}_\perp = \boldsymbol{y}. \tag{28}$$

Пусть Q – преобразование поворота на некоторый произвольный угол φ вокруг прямой OO′. Умножим (28) слева на Q:

$$Q\mathbb{A}(\boldsymbol{v})Q^T Q\ \boldsymbol{x}_\perp = Q\boldsymbol{y}. \tag{29}$$

Здесь согласно (22)

$$Q\mathbb{A}(\boldsymbol{v})Q^T = \mathbb{A}(\tilde{\boldsymbol{v}}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{v}),$$

где $\tilde{\boldsymbol{v}} = Q\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. Поэтому, как следует из (29),

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})Q\boldsymbol{x}_{\perp} = Q\boldsymbol{y}. \quad (30)$$

Покажем, что $\boldsymbol{y}$ ортогонален $\boldsymbol{v}$. Пусть $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_{||} + \boldsymbol{y}_{\perp}$ и пусть Q осуществляет поворот на $\varphi=180^0$. Тогда из (30) имеем:

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})Q\boldsymbol{x}_{\perp} = Q\boldsymbol{y} = Q(\boldsymbol{y}_{||} + \boldsymbol{y}_{\perp}) = Q\boldsymbol{y}_{||} + Q\boldsymbol{y}_{\perp} = \boldsymbol{y}_{||} - \boldsymbol{y}_{\perp}, \quad (31)$$

т.к. составляющая вектора $\boldsymbol{y}$, параллельная $\boldsymbol{v}$, при таком повороте не изменяется, а ортогональная – меняет направление на противоположное. С другой стороны, левая часть (31) с учетом (28) представляется в виде:

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})Q\boldsymbol{x}_{\perp} = -A(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}_{\perp} = -\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}_{||} - \boldsymbol{y}_{\perp}. \quad (32)$$

Сравнение (31) и (32) дает: $\boldsymbol{y}_{||} = \boldsymbol{0}$.

Таким образом, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_{\perp}$ и равенства (28) и (30) переписываются в виде:

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{y}_{\perp}, \quad (33)$$

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})Q\boldsymbol{x}_{\perp} = Q\boldsymbol{y}_{\perp}. \quad (34)$$

Вектор $\boldsymbol{y}_{\perp}$ может быть получен из вектора $\boldsymbol{x}_{\perp}$ в результате поворота Q_0 последнего на некоторый угол φ_0 вокруг точки O в плоскости P и растяжением в κ раз:

$$\boldsymbol{y}_{\perp} = \kappa Q_0 \boldsymbol{x}_{\perp}. \quad (35)$$

Подстановка в (33) дает:

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}_{\perp} = \kappa Q_0 \boldsymbol{x}_{\perp}. \tag{36}$$

Покажем, что данное равенство с теми же самыми Q_0 и κ будет справедливо для любого вектора $\hat{x}_{\perp}$.

Действительно, любой вектор $\hat{x}_{\perp}$ можно выразить через $\boldsymbol{x}_{\perp}$ аналогично (35)

$$\hat{x}_{\perp} = \sigma Q_1 \boldsymbol{x}_{\perp} \tag{37}$$

с некоторыми σ и Q_1. Применим к обеим частям (37) оператор $\mathbb{A}(\boldsymbol{v})$ и примем во внимание равенство (34), в котором положим Q= Q_1, а также (35):

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\,\hat{x}_{\perp} = \sigma\, \mathbb{A}(\boldsymbol{v}) Q_1 \boldsymbol{x}_{\perp} = \sigma\, Q_1 \boldsymbol{y}_{\perp} = \sigma\, \kappa Q_1 Q_0 \boldsymbol{x}_{\perp} = \sigma\, \kappa Q_0 Q_1 \boldsymbol{x}_{\perp} = \kappa Q_0\, \hat{x}_{\perp}.$$

Здесь мы воспользовались коммутативностью произведения $Q_1 Q_0$.

Таким образом, (27) доказано.

Из (27) вытекают два следствия.

Следствие 1. Все точки произвольной окружности C_1 с центром в точке O и лежащей в плоскости P отображаются оператором $\mathbb{A}(\boldsymbol{v})$ в точки окружности C_2, лежащей в той же плоскости и концентрической с C_1, причем $r_2 / r_1 = \kappa$.

Следствие 2. Из (27) получаем:

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}_{\perp} = \kappa \mathbb{A}(\boldsymbol{v}) Q_0 \boldsymbol{x}_{\perp}.$$

Так как вектор $Q_0 \boldsymbol{x}_{\perp}$ ортогонален $\boldsymbol{v}$, то применяя к правой части последнего равенства еще раз (27), приходим к равенству

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}_{\perp} = \kappa^2 Q_0^2 \boldsymbol{x}_{\perp}, \tag{38}$$

где Q_0^2 осуществляет поворот на угол $2\varphi_0$ вокруг точки O в плоскости P_1.

(B). Покажем теперь, что в (27) φ_0=0 и $\kappa = 1$.

Предварительно установим справедливость равенства $\mathbb{A}(\boldsymbol{v}) = \mathbb{A}(-\boldsymbol{v})$. Для этого прибегнем к полной пространственной инверсии. Следует заметить, что инверсия трех пространственных координатных осей в $\mathbf{R}^3$ не входит в группу **SO(3)**, хотя и является ортогональным преобразованием. Согласно нашему требованию (см. раздел 3) искомое преобразование должно сохранять свой вид и при полной инверсии. (Другие теоретически возможные решения, не удовлетворяющие этому требованию, приводят к «правосторонним» или «левосторонним» преобразованиям (25), в которых оператор $\mathbb{A}(\boldsymbol{v})$ осуществляет поворот вектора $\boldsymbol{x}_\perp$ (вправо или влево по отношению к направлению вектора $\boldsymbol{v}$) на угол $\varphi(v)$ и растяжение. Подобные решения, как правило, в научной литературе не рассматриваются. Мы также не включили их в наше описание, в том числе мы опускаем вопросы, касающиеся их существования.)

Полная пространственная инверсия означает замену $x_i \to -x_i$, и $x'_i \to -x'_i$. При такой замене вектор скорости меняет направление на обратное: $\boldsymbol{v} \to -\boldsymbol{v}$. Преобразование (24а) запишется в виде:

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(-\boldsymbol{v})\boldsymbol{x} - \gamma(|v|)\boldsymbol{v}\,t\,. \tag{39}$$

В силу нашего требования оно должно совпадать с (24а), а это означает, что $\mathbb{A}(\boldsymbol{v}) = \mathbb{A}(-\boldsymbol{v})$.

Далее, рассмотрим преобразование (24) из S в S' в форме (25), примененное к произвольному вектору $\boldsymbol{x}_\perp$, ортогональному $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}_\perp - \gamma(|v|)\boldsymbol{v}\,t; \tag{40a}$$

$$t' = \gamma(|v|)\cdot t. \tag{40b}$$

Обратный переход из S' в S осуществляется также по формулам (24) с заменой в них штрихованных переменных на нештрихованные и наоборот, а также $\boldsymbol{v}$ на $-\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{x} = \mathbb{A}(-\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}' + \gamma(|v|)\boldsymbol{v}\,t', \tag{40′ a}$$

$$t = -\lambda(|v|)\cdot \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}' + \gamma(|v|)\,t'. \tag{40′ b}$$

В результате обратного преобразования (40′) мы возвращаемся в исходную систему отсчета S. Поэтому пространственная часть, определяемая (40′ а), должна совпасть с исходным вектором $\boldsymbol{x}_\perp$:

$$\boldsymbol{x}_\perp = \mathbb{A}(-\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}' + \gamma(|v|)\boldsymbol{v}\,t' =$$

$$= \mathbb{A}(-\boldsymbol{v})[\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}_\perp - \gamma(|v|)\boldsymbol{v}t] + \gamma^2(|v|)\,\boldsymbol{v}\,t = \mathbb{A}(\boldsymbol{v})\mathbb{A}(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{x}_\perp\,. \tag{41}$$

Из равенства (38) следствия 2 выводим отсюда:

$$\boldsymbol{x}_{\perp} = \kappa^2 Q_0^2 \boldsymbol{x}_{\perp} . \tag{42}$$

Так как Q_0^2 не изменяет длину вектора, то $\kappa = 1$. Кроме того, поворот вектора $\boldsymbol{x}_{\perp}$ на угол $2\varphi_0$ вокруг точки O в плоскости P должен давать тот же вектор. Отсюда следует, что либо $\varphi_0 = 0$, либо $\varphi_0 = \pi$. Последний случай мы отбрасываем, т.к. иначе матрица $\mathbb{A}(\boldsymbol{v})$ в системе координат с осью x_3, параллельной $\boldsymbol{v}$, будет иметь вид

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(|\mathrm{v}|) \end{vmatrix},$$

и при $v \to 0$ мы не получим необходимого предельного соотношения $\mathbb{A}(\boldsymbol{v}) \to E$.

Таким образом, (26) установлено.

4.7. Пространственная редукция преобразований

Обратимся к последней полученной нами версии преобразования $(\boldsymbol{x},t) \to (\boldsymbol{x}',t')$ в форме (25). С учетом доказанного в предыдущем разделе равенства (26) равенство (25a) упрощается

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}_{\perp} + \gamma(|v|)\boldsymbol{x}_{\parallel} - \gamma(|v|)\boldsymbol{v}\, t . \tag{43}$$

Разложим $\boldsymbol{x}'$ в левой части (43) на две составляющие: вдоль и перпендикулярно $\boldsymbol{v}$: $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'_{\perp} + \boldsymbol{x}'_{\parallel}$. Сравнив после этого левую и правую части (43), приходим к двум равенствам для каждой из компонент $\boldsymbol{x}'_{\perp}$ и $\boldsymbol{x}'_{\parallel}$. Добавляя к ним равенство (25b) без изменений, получим формулы перехода из системы S в S' в следующем виде

$$\boldsymbol{x}'_{\parallel} = \gamma(|v|)[\boldsymbol{x}_{\parallel} - \boldsymbol{v}t], \tag{44a}$$

$$t' = \lambda(|v|)\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{x}_{\parallel} + \gamma(|v|)\, t, \tag{44b}$$

$$\boldsymbol{x}'_{\perp} = \boldsymbol{x}_{\perp} . \tag{44c}$$

Из этих формул видно, что изменениям при переходе из одной системы отсчета в другую подвергается лишь составляющая пространственных векторов, параллельная вектору скорости относительного движения систем. Ортогональные составляющие векторов остаются без изменений.

Введем единичный вектор $\boldsymbol{n}$, сонаправленный с $\boldsymbol{v}$. Обозначим x, x' и v – проекции векторов $\boldsymbol{x}_{||}$, $\boldsymbol{x}'_{||}$ и $\boldsymbol{v}$ на направление вдоль $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{x}_{||} = x_{||}\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{x}'_{||} = x'_{||}\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{n}$. Тогда (44) запишутся в таком виде:

$$x'_{||} = \gamma(|v|)x_{||} - \gamma(|v|)\,v\,t = \gamma(|v|)\,[\,x_{||} - v\,t\,], \tag{45a}$$

$$t' = \lambda(|v|)\cdot v\,x_{||} + \gamma(|v|)\,t = \gamma(|v|)\,[\,t - \sigma(v)\cdot x_{||}\,], \tag{45b}$$

$$\boldsymbol{x}'_{\perp} = \boldsymbol{x}_{\perp}. \tag{45c}$$

Здесь обозначено

$$\sigma(v) = -\frac{\lambda(|v|)\cdot v}{\gamma(|v|)}. \tag{46}$$

Таким образом, при переходе из одной системы отсчета в другую формулы преобразования параллельной компоненты и времени приобретают скалярный вид (45a,b).

4.8. Выражения для $\gamma(|v|)$ и $\sigma(v)$ и фундаментальная скорость

Формулы (45), записанные в скалярном виде, дают возможность перейти в систему координат с одной пространственной переменной, например, *x*, ось *OX* которой совпадает с прямой OO′. В этом случае, как показано в [1], могут быть конкретизированы выражения для $\gamma(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ как функции от v. Этот вывод мы здесь не приводим из экономии места (~2-3 страницы). Приведем лишь итоговый результат (см. [1]):

$$\frac{\sigma(v)}{v} = \alpha = \mathrm{const}, \tag{47}$$

$$\gamma(|v|) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha v^2}}. \tag{48}$$

Таким образом, функциональная форма преобразования между наблюдателями двух инерциальных систем отсчета полностью определяется равенствами (45 a,b), (47) и (48) с некоторой универсальной константой α. Представим ее в виде $\alpha = 1/c^2$, где константа c имеет размерность скорости. Из изложенного выше следует, что c представляет собой *фундаментальную скорость*, универсальную для всех инерциальных систем отсчета. В [1], [10] (Гл. 6) показано, что принцип независимости фундаментальной скорости от выбора системы отсчета вытекает именно из математических свойств преобразования (45a,b)–(48), но никак не из конкретного числового значения c. Там же показано, что скорость материального объекта всегда меньше c в любой системе отсчета. Значение c в настоящее время не удаётся получить чисто аналитическими методами, но оно может быть устанавлено экспериментально.

В нашем мире, как показали многочисленные эксперименты, числовое значение фундаментальной скорости совпадает с величиной скорости света в вакууме:

$$c = 299792458 \text{ м/с.} \tag{49}$$

4.9. Формулы преобразования Лоренца для 3D случая

Итак, произведя в (45) подстановки (47) и (48) с $\alpha = 1/c^2$, получаем формулы преобразования Лоренца в хорошо известном виде (см., напр., [8,9]):

$$x'_{||} = \frac{x_{||} - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{50a}$$

$$t' = \frac{t - vx_{||}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{50b}$$

$$\boldsymbol{x}'_{\perp} = \boldsymbol{x}_{\perp}. \tag{50c}$$

Обратное преобразование:

$$x_{||} = \frac{x'_{||} + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{50′ a}$$

$$t = \frac{t' + vx'_{||}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{50′ b}$$

$$\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x}'_{\perp}, \tag{50′ c}$$

где $x_{\|}$ и $x'_{\|}$ – проекции радиус-векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ на направление, параллельное $\boldsymbol{v}$, а $\boldsymbol{x}_{\perp}$ и $\boldsymbol{x}'_{\perp}$ – составляющие этих радиус-векторов, ортогональные $\boldsymbol{v}$.

Литература

1. Степанов С.С. Релятивистский мир (2012). // http://synset.com.
2. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел.// Ann d. Phys.,1905 b. 17, s. 89, русский перевод в «Эйнштейн А. Собрание научных трудов в четырёх томах. Том 1. Работы по теории относительности 1905–1920»- М.: Наука, 1965.
3. Паули В. Теория относительности. – М.: Наука, 1991, 388 с.
4. Ignatowsky W.A. Berich. der Deutschen Phys. Ges., 788 (1910), [Перевод: http://synset.com].
5. Ignatowsky W.A. Phys.Z., 11 972 (1910).
6. Степанов С.С. 100 лет без второго постулата Эйнштейна (2012). http://synset.com.
7. Frank P., Rothe H.// Ann. Phys. 34 825 (1911) [Перевод: http://synset.com].
8. Киттель Ч., Наит У., Рудерман М. Берклеевский курс физики. – Издание 3-е, исправленное. – М.: Наука, 1986. – Т. I. Механика, с. 373,374, 481 с.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – Издание 7-е, исправленное. – М.: Наука, 1988, 512 с. – (Теоретическая физика, том II).
10. Безменов И.В., Блинов И.Ю. Теоретические основы построения моделей для описания современных шкал времени и стандартов частоты. – ФГУП «ВНИИФТРИ», 2015, С. 529.

5. Дополнение

Докажем линейность преобразования (1). Найдем зависимость координат и времени некоторого события, измеренного наблюдателями в двух инерциальных системах отсчета S и S':

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{v}); \quad t' = G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{v}).$$

Дифференциалы величин записываются стандартным образом:

$$dx'_\alpha = \frac{\partial F^\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta + \frac{\partial F^\alpha}{\partial t} dt; \qquad dt' = \frac{\partial G}{\partial x_\beta} dx_\beta + \frac{\partial G}{\partial t} dt.$$

Здесь и далее переменной t соответствует индекс 0, греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3, слагаемые с повторяющимся (немым) индексом следует рассматривать как сумму всех значений этого слагаемого при всех возможных значениях индекса.

Рассмотрим некоторое равномерно движущееся тело. Его скорость, измеренную наблюдателем в системе S, обозначим $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, а в системе S' – $\boldsymbol{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$. Компоненты обоих векторов связаны равенствами:

$$u'_\alpha = \frac{dx'_\alpha}{dt'} = \frac{\dfrac{\partial F^\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta + \dfrac{\partial F^\alpha}{\partial t} dt}{\dfrac{\partial G}{\partial x_\beta} dx_\beta + \dfrac{\partial G}{\partial t} dt} = \frac{\dfrac{\partial F^\alpha}{\partial x_\beta} u_\beta + \dfrac{\partial F^\alpha}{\partial t}}{\dfrac{\partial G}{\partial x_\beta} u_\beta + \dfrac{\partial G}{\partial t}}; \; \alpha=1,2,3.$$

Мы считаем, что компоненты $u_\beta = \dfrac{dx_\beta}{dt}$ вектора скорости $\boldsymbol{u}$ – суть произвольные постоянные. Эта же скорость, измеренная в S', в силу аксиомы **А2** не должна зависеть от того, в какой точке системы S находится тело. Это означает, что правые части выражений для компонент вектора $\boldsymbol{u}'$ не зависят от $\boldsymbol{x}$ и t. Поэтому частные производные от этих выражений по каждой из переменных x_1, x_2, x_3 и x_0=t должны быть равны нулю. Ниже мы ради компактности частные производные по координатам и времени будем обозначать соответствующими нижними индексами:

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial x_i} = F_i^\alpha; \; \frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} = F_{ij}^\alpha; \qquad i,j = \overline{0,3}.$$

Итак, имеем на основании аксиом **А1** и **А2**:

$$\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \; (F_{i\beta}^\alpha u_\beta + F_{i0}^\alpha)(G_\gamma u_\gamma + G_0) -$$

$$-(F_\beta^\alpha u_\beta + F_0^\alpha)(G_{i\gamma} u_\gamma + G_{i0}) = 0; \qquad i = \overline{0,3}; \; \alpha = \overline{1,3}. \qquad (Д.1)$$

Произведя в левой части равенств (Д.1) (внутри каждой скобки по повторяющимся индексам производится суммирование) умножения и группировку слагаемых, получаем:

$$(G_\gamma F^\alpha_{i\beta} - F^\alpha_\beta G_{i\gamma}) u_\beta u_\gamma +$$
$$+(G_0 F^\alpha_{i\beta} + G_\beta F^\alpha_{i0} - F^\alpha_\beta G_{i0} - F^\alpha_0 G_{i\beta}) u_\beta + G_0 F^\alpha_{i0} - F^\alpha_0 G_{i0} = 0; \qquad (Д.2)$$
$$i = \overline{0,3};\ \alpha = \overline{1,3}.$$

Левые части равенств (Д.2) представляют собой полиномы второго порядка относительно величин u_1, u_2, u_3. В выражениях для функций $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{v})$ и $G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{v})$ помимо координат $(\boldsymbol{x},t)$ в качестве параметра входит еще вектор $\boldsymbol{v}$ скорости движения системы S' относительно S, но не входит вектор скорости $\boldsymbol{u}$ рассматриваемого тела. Поэтому, считая компоненты вектора $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ произвольными и независимыми величинами, заключаем, что каждое из равенств (Д.2) будет выполняться только в случае равенства нулю (для фиксированных $i = \overline{0,3}$; $\alpha = \overline{1,3}$):

a) шести соответствующих коэффициентов в левой части при произведениях $u_\beta u_\gamma$ с $\gamma \neq \beta$,

b) трех коэффициентов при u^2_β ,

c) трех коэффициентов при u_β и

d) свободного члена:

$$G_\gamma F^\alpha_{i\beta} - F^\alpha_\beta G_{i\gamma} + G_\beta F^\alpha_{i\gamma} - F^\alpha_\gamma G_{i\beta} = 0; \qquad (Д.3a)$$

$$G_\beta F^\alpha_{i\beta} - F^\alpha_\beta G_{i\beta} = 0; \qquad (Д.3b)$$

$$G_0 F^\alpha_{i\beta} + G_\beta F^\alpha_{i0} - F^\alpha_\beta G_{i0} - F^\alpha_0 G_{i\beta} = 0; \qquad (Д.3c)$$

$$G_0 F^\alpha_{i0} - F^\alpha_0 G_{i0} = 0; \qquad (Д.3d)$$

$$(i = \overline{0,3};\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{1,3};\ \gamma \neq \beta).$$

Примечание: В этих и следующих ниже равенствах по повторяющимся индексам суммирования не производится.

Равенства (Д.3) будем рассматривать как однородную систему линейных уравнений относительно F_{ij}^{α}, G_{ij} (i,j=0,..,3). Во всех уравнениях (Д.3) индекс i пробегает значения от 0 до 3, а греческие индексы – от 1 до 3, причем $\gamma \neq \beta$. Нетрудно видеть, что число уравнений в системе = 156, число неизвестных = 40. Здесь мы принимаем во внимание, что $F_{ij}^{\alpha} = F_{ji}^{\alpha}$ и $G_{ij} = G_{ji}$. Наша задача – показать, что равенство нулю всех вторых производных F^{α}, G является единственным решением (Д.3), откуда и будет следовать линейность преобразования (1).

Очевидно, $F_{ij}^{\alpha} \equiv 0$, $G_{ij} \equiv 0$ является решением (Д.3). Покажем, что это решение является следствием из (Д.3), т.е. других решений система (Д.3) не имеет.

1). Покажем сначала, что из (Д.3) следует $F_{\beta\beta}^{\alpha} \equiv G_{\beta\beta} \equiv 0$; $\alpha, \beta = \overline{1,3}$.

Фиксируем α и β и положим в (Д.3a) i= β. Мы получим следующие два уравнения, соответствующие двум возможным значениям γ:

$$G_{\gamma} F_{\beta\beta}^{\alpha} - F_{\beta}^{\alpha} G_{\beta\gamma} + G_{\beta} F_{\beta\gamma}^{\alpha} - F_{\gamma}^{\alpha} G_{\beta\beta} = 0; \ (\gamma \neq \beta). \qquad (Д.4)$$

Запишем (Д.3b) с $i = \gamma$. Мы получим также два возможных равенства:

$$G_{\beta} F_{\gamma\beta}^{\alpha} - F_{\beta}^{\alpha} G_{\gamma\beta} = 0, \ (\gamma \neq \beta). \qquad (Д.5)$$

Вычитая (Д.5) из (Д.4), получаем следующие 2 равенства:

$$G_{\gamma} F_{\beta\beta}^{\alpha} - F_{\gamma}^{\alpha} G_{\beta\beta} = 0; \ (\gamma \neq \beta). \qquad (Д.6)$$

Запишем теперь (Д.3b) с $i = \beta$:

$$G_{\beta} F_{\beta\beta}^{\alpha} - F_{\beta}^{\alpha} G_{\beta\beta} = 0. \qquad (Д.7)$$

Наконец, запишем (Д.3c) с $i = \beta$ и вычтем из полученного равенства (Д.3b) с $i = 0$:

$$G_{0} F_{\beta\beta}^{\alpha} - F_{0}^{\alpha} G_{\beta\beta} = 0. \qquad (Д.8)$$

В результате мы получили систему (Д.6)-(Д.8) 4-х уравнений с двумя неизвестными $F^{\alpha}_{\beta\beta}$ и $G_{\beta\beta}$:

$$
\begin{aligned}
&G_1 F^{\alpha}_{\beta\beta} - F^{\alpha}_1 G_{\beta\beta} = 0;\\
&G_2 F^{\alpha}_{\beta\beta} - F^{\alpha}_2 G_{\beta\beta} = 0;\\
&G_3 F^{\alpha}_{\beta\beta} - F^{\alpha}_3 G_{\beta\beta} = 0;\\
&G_0 F^{\alpha}_{\beta\beta} - F^{\alpha}_0 G_{\beta\beta} = 0.
\end{aligned}
\tag{Д.9}
$$

Умножим первое из уравнений (Д.9) на дополнительный минор M_{14} матрицы J^T

$$
J^T = \begin{vmatrix} \partial F^1/\partial x_1 & \partial F^2/\partial x_2 & \partial F^3/\partial x_1 & \partial G/\partial x_1 \\ \partial F^1/\partial x_2 & \partial F^2/\partial x_2 & \partial F^3/\partial x_2 & \partial G/\partial x_2 \\ \partial F^1/\partial x_3 & \partial F^2/\partial x_3 & \partial F^3/\partial x_3 & \partial G/\partial x_3 \\ \partial F^1/\partial t & \partial F^2/\partial t & \partial F^3/\partial t & \partial G/\partial t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F^1_1 & F^2_1 & F^3_1 & G_1 \\ F^1_2 & F^2_2 & F^3_2 & G_2 \\ F^1_3 & F^2_3 & F^3_3 & G_3 \\ F^1_0 & F^2_0 & F^3_0 & G_0 \end{vmatrix}.
$$

Второе уравнение (Д.9) умножим на M_{24}, третье – на M_{34} и четвертое – на M_{44} и затем все полученные равенства сложим. В результате получим:

$$
\det\left|J^T\right| \cdot F^{\alpha}_{\beta\beta} - \det\begin{vmatrix} F^1_1 & F^2_1 & F^3_1 & F^{\alpha}_1 \\ F^1_2 & F^2_2 & F^3_2 & F^{\alpha}_2 \\ F^1_3 & F^2_3 & F^3_3 & F^{\alpha}_3 \\ F^1_0 & F^2_0 & F^3_0 & F^{\alpha}_0 \end{vmatrix} \cdot G_{\beta\beta} = 0.
$$

Второй определитель =0, т.к. в нем содержатся два одинаковых столбца, следовательно,

$$
\det\left|J^T\right| \cdot F^{\alpha}_{\beta\beta} = 0,
$$

откуда с учетом $\det\left|J^T\right| = \det\left|J\right| \neq 0$, получаем $F^{\alpha}_{\beta\beta} = 0$.

Умножим теперь каждое из уравнений (Д.9) на $M_{1\alpha},\ldots,M_{4\alpha}$ соответственно и сложим их:

$$\det\left|A^{\alpha}\right|\cdot F^{\alpha}_{\beta\beta}-\det\left|J^{T}\right|\cdot G_{\beta\beta}=0.$$

Здесь A^{α} обозначает матрицу, полученную заменой α-го столбца матрицы J^{T} столбцом $(G_1,G_2,G_3,G_0)^{\mathrm{T}}$. Ее определитель, очевидно, равен нулю и поэтому получаем отсюда $\det\left|J^{T}\right|\cdot G_{\beta\beta}=0$, т.е. $G_{\beta\beta}\equiv 0$.

2). Покажем, что $F^{\alpha}_{00}\equiv G_{00}\equiv 0$.

Для этого запишем (Д.3c,d,b) для $i=0$:

$$G_0F^{\alpha}_{0\beta}-F^{\alpha}_{\beta}G_{00}+G_{\beta}F^{\alpha}_{00}-F^{\alpha}_{0}G_{0\beta}=0;\ (\beta=\overline{1,3}),\qquad (Д.10)$$

$$G_0F^{\alpha}_{00}-F^{\alpha}_{0}G_{00}=0;\qquad (Д.11)$$

$$G_0F^{\alpha}_{0\beta}-F^{\alpha}_{0}G_{0\beta}=0;\quad (\beta=\overline{1,3}).\qquad (Д.12)$$

Вычтем из (Д.15) (Д.17):

$$G_{\beta}F^{\alpha}_{00}-F^{\alpha}_{\beta}G_{00}=0;\ (\beta=\overline{1,3}).\qquad (Д.13)$$

Объединяя последние уравнения с (Д.11), получаем группу уравнений

$$\begin{gathered}G_1F^{\alpha}_{00}-F^{\alpha}_{1}G_{00}=0;\\ G_2F^{\alpha}_{00}-F^{\alpha}_{2}G_{00}=0;\\ G_3F^{\alpha}_{00}-F^{\alpha}_{3}G_{00}=0;\\ G_0F^{\alpha}_{00}-F^{\alpha}_{0}G_{00}=0.\end{gathered}\qquad (Д.14)$$

Отсюда, так же, как и в предыдущем пункте, выводим $F^{\alpha}_{00}\equiv G_{00}\equiv 0$.

3). Пусть (β,γ,δ) – произвольная перестановка чисел (1,2,3). Покажем, что $F^{\alpha}_{\beta\gamma}\equiv G_{\beta\gamma}\equiv 0;\ (\gamma\neq\beta)$.

Два из 4-х нужных нам уравнений получим, записав (Д.3a) и (Д.3b) для $i=\gamma$, приняв во внимание $F^{\alpha}_{\gamma\gamma}\equiv G_{\gamma\gamma}\equiv 0$:

$$G_{\gamma}F^{\alpha}_{\beta\gamma}-F^{\alpha}_{\gamma}G_{\beta\gamma}=0;\qquad (Д.15)$$

$$G_{\beta} F^{\alpha}_{\beta\gamma} - F^{\alpha}_{\beta} G_{\beta\gamma} = 0. \qquad (Д.16)$$

Еще одно уравнение получим следующим образом. Запишем (Д.3а), подставляя вместо (γ, β, i) следующие перестановки (γ, β, δ), (β, δ, γ), (δ, γ, β):

$$G_{\beta} F^{\alpha}_{\delta\gamma} - F^{\alpha}_{\gamma} G_{\delta\beta} + G_{\gamma} F^{\alpha}_{\delta\beta} - F^{\alpha}_{\beta} G_{\delta\gamma} = 0; \qquad (Д.17)$$

$$G_{\delta} F^{\alpha}_{\gamma\beta} - F^{\alpha}_{\beta} G_{\gamma\delta} + G_{\beta} F^{\alpha}_{\gamma\delta} - F^{\alpha}_{\delta} G_{\gamma\beta} = 0; \qquad (Д.18)$$

$$G_{\gamma} F^{\alpha}_{\beta\delta} - F^{\alpha}_{\delta} G_{\beta\gamma} + G_{\delta} F^{\alpha}_{\beta\gamma} - F^{\alpha}_{\gamma} G_{\beta\delta} = 0. \qquad (Д.19)$$

Сложим (Д.19) и (Д.18), затем вычтем (Д.17). После очевидных преобразований получим:

$$G_{\delta} F^{\alpha}_{\beta\gamma} - F^{\alpha}_{\delta} G_{\beta\gamma} = 0. \qquad (Д.20)$$

Последнее нужное нам уравнение получим аналогично (Д.20). Запишем (Д.7), подставляя в это равенство вместо (γ, β, i) соответственно ($\gamma, \beta, 0$), ($\beta, 0, \gamma$), ($0, \gamma, \beta$):

$$G_{\gamma} F^{\alpha}_{0\beta} - F^{\alpha}_{\beta} G_{0\gamma} + G_{\beta} F^{\alpha}_{0\gamma} - F^{\alpha}_{\gamma} G_{0\beta} = 0; \qquad (Д.21)$$

$$G_{0} F^{\alpha}_{\gamma\beta} - F^{\alpha}_{\beta} G_{0\gamma} + G_{\beta} F^{\alpha}_{\gamma 0} - F^{\alpha}_{0} G_{\gamma\beta} = 0; \qquad (Д.22)$$

$$G_{0} F^{\alpha}_{\beta\gamma} - F^{\alpha}_{\gamma} G_{\beta 0} + G_{\gamma} F^{\alpha}_{\beta 0} - F^{\alpha}_{0} G_{\beta\gamma} = 0. \qquad (Д.23)$$

Сложим (Д.23) и (Д.22), затем вычтем (Д.21):

$$G_{0} F^{\alpha}_{\beta\gamma} - F^{\alpha}_{0} G_{\beta\gamma} = 0. \qquad (Д.24)$$

Равенства (Д.15), (Д.16), (Д.20) и (Д.24) образуют систему:

$$\begin{aligned} &G_{1} F^{\alpha}_{\beta\gamma} - F^{\alpha}_{1} G_{\beta\gamma} = 0; \\ &G_{2} F^{\alpha}_{\beta\gamma} - F^{\alpha}_{2} G_{\beta\gamma} = 0; \\ &G_{3} F^{\alpha}_{\beta\gamma} - F^{\alpha}_{3} G_{\beta\gamma} = 0; \\ &G_{0} F^{\alpha}_{\beta\gamma} - F^{\alpha}_{0} G_{\beta\gamma} = 0. \end{aligned} \qquad (Д.25)$$

Из нее, как и выше, выводим $F^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv G_{\beta\gamma} \equiv 0$.

4). Наконец, покажем, что $F^{\alpha}_{0\beta} \equiv G_{0\beta} \equiv 0$, $\beta = \overline{1,3}$.

Запишем (Д1.3b) с $i = 0$ и (Д1.3d) с $i = \beta$. Получим два уравнения:

$$G_{\beta} F^{\alpha}_{0\beta} - F^{\alpha}_{\beta} G_{0\beta} = 0; \tag{Д.26}$$

$$G_0 F^{\alpha}_{0\beta} - F^{\alpha}_0 G_{0\beta} = 0. \tag{Д.27}$$

Далее, запишем (Д.3a) с $i = 0$ и (Д.3c) – с $i = \gamma$:

$$G_{\gamma} F^{\alpha}_{0\beta} - F^{\alpha}_{\beta} G_{0\gamma} + G_{\beta} F^{\alpha}_{0\gamma} - F^{\alpha}_{\gamma} G_{0\beta} = 0; \tag{Д.28}$$

$$G_0 F^{\alpha}_{\gamma\beta} - F^{\alpha}_{\beta} G_{0\gamma} + G_{\beta} F^{\alpha}_{0\gamma} - F^{\alpha}_0 G_{\gamma\beta} = 0. \tag{Д.29}$$

Вычитая из (Д.28) (Д.29) и учитывая, что $F^{\alpha}_{\gamma\beta} \equiv G_{\gamma\beta} \equiv 0$, выводим еще 2 уравнения, соответствующие двум значениям $\gamma \neq \beta$:

$$G_{\gamma} F^{\alpha}_{0\beta} - F^{\alpha}_{\gamma} G_{0\beta} = 0. \tag{Д.30}$$

Объединяя последние два уравнения с (Д.26), (Д.27), получаем систему

$$\begin{aligned} &G_1 F^{\alpha}_{0\beta} - F^{\alpha}_1 G_{0\beta} = 0; \\ &G_2 F^{\alpha}_{0\beta} - F^{\alpha}_2 G_{0\beta} = 0; \\ &G_3 F^{\alpha}_{0\beta} - F^{\alpha}_3 G_{0\beta} = 0; \\ &G_0 F^{\alpha}_{0\beta} - F^{\alpha}_0 G_{0\beta} = 0. \end{aligned} \tag{Д.31}$$

Из нее, как и выше (см. пункт (1)), получаем $F^{\alpha}_{0\beta} \equiv G_{0\beta} \equiv 0$.