

УДК 521.3, 521.92

**ФОРМИРОВАНИЕ ОПОРНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КООРДИНАТ И ПОПРАВК ЧАСОВ КА ГЛОНАСС****И.В. Безменов, С.Л. Пасынок**

ФГУП «ВНИИФТРИ», Менделеево, Московская область

bezmenov@vniiftri.ru

*Разработаны алгоритм и программа расчета опорных значений координат и поправок часов КА ГЛОНАСС на основе обработки данных по орбитам, предоставляемых ежедневно несколькими центрами обработки и анализа данных. Для проверки качества получаемых опорных значений орбит/часов проведены расчеты разностей координат антенн приемников, установленных во ВНИИФТРИ (Менделеево, Московская обл.) и ВС филиале ВНИИФТРИ (Иркутск) за двухнедельный период. Проведено сравнение полученных результатов с аналогичными результатами, полученными с использованием данных по орбитам КА ГЛОНАСС других центров. Показаны хорошие статистические характеристики вычисляемых опорных значений орбит/часов КА, а также их высокая устойчивость к выбросам отдельных центров. Получены некоторые теоретические оценки для СКП координат опорных значений КА. Показано, что при сравнимых СКП определения координат КА отдельными Центрами за длительный период, СКП опорных значений не превосходят СКП координат КА любого из Центров.*

*Ключевые слова: метрология в комбинировании, ГНСС, Глонасс, орбиты, поправки часов*

**Введение**

Как известно, несколько Центров обработки и анализа данных в РФ и за рубежом регулярно производят вычисления орбит и поправок часов космических аппаратов (КА) ГЛОНАСС, основываясь на данные измерений, поступающие от многих наземных станций, расположенных по всему миру. Получаемые решения выкладываются на FTP-серверы соответствующих организаций. Из-за различий в программах обработки и применяемых при расчетах моделей данные по орбитам и поправкам часов спутников, представляемые различными Центрами, несколько отличаются друг от друга. В отсутствие априорной информации о точном решении орбитам ни одного из Центров не может быть отдано предпочтение. Это одна из основных

причин, по которой вплоть до настоящего времени орбиты ни одного из Центров не имеют статус официальных. С другой стороны, возрастающая роль данных по орбитам КА ГЛОНАСС, используемых в решении многих прикладных задач космической геодезии, диктует необходимость иметь такие продукты, создаваемые уполномоченной российской организацией, которые могли бы служить официальными данными на территории РФ.

В ряде случаев, когда эталон физической величины по каким-либо причинам отсутствует, а ее значения, полученные различными лабораториями, различаются, для метрологических работ используется опорное значение физической величины [1], получаемое с помощью математической обработки (комби-

нирования) результатов сличений, проводимых уполномоченными на это метрологическими организациями.

Такая процедура распространена во многих областях для получения официальных результатов, используемых в метрологических работах в качестве опорного значения, например:

– в секции по времени и частоте Международного бюро мер и весов (BIPM) для установления значенных моментов времени в шкале международного координированного времени (UTC);

– в Международной службе вращения Земли и опорных систем отсчета (IERS) для формирования официальных данных о параметрах вращения Земли (ПВЗ) – серии EOPC04;

– в Международной ГНСС службе (IGS) для формирования

официальных (опорных) значений координат и поправок часов космических аппаратов (КА) GPS, начиная с 1993 г. и по настоящее время.

С 2004 г. опорные значения координат и поправок часов КА ГЛОНАСС в международном масштабе в рамках программы IGLOS-PP (International GLONASS Service Pilot Project) формирует уполномоченный IGS на эту деятельность Центр обработки и анализа данных – NOAA/NGS (США).

Несмотря на то, что программа IGLOS-PP официально была завершена в конце 2005 г., работы по вычислению опорных значений координат и поправок часов КА ГЛОНАСС в международном масштабе продолжают до настоящего времени.

Ниже (табл. 1) перечислены организации, принимавшие в разное время (вплоть до настоящего) участие в этой программе.

Таблица 1

**Центры-участники программы IGLOS-PP**

№	Название	Аббревиатура
<b>Центр-координатор, формирующий и публикующий файлы с опорными значениями координат и поправками часов КА ГЛОНАСС:</b>		
	Центр обработки и анализа данных – NOAA/NGS, США	IGL
<b>Организации, предоставляющие данные по орбитам:</b>		
1	Федеральное агентство по геодезии и картографии, Германия	BKG
2	Европейский центр определения орбит, г. Берн, Швейцария	COD
3	Европейский центр определения орбит, Астрономический институт г. Берн, Швейцария	COF
4	Министерство природных ресурсов Канады	EMR
5	Европейское космическое агентство, Германия	ESA
6	Центр геодезических исследований, г. Потсдам, Германия	GFZ
7	Национальный центр космических исследований, Франция	GRG
8	Информационный аналитический центр ГЛОНАСС, ЦНИИ-МАШ, РФ	IAC
9	Центр управления полетами ЦНИИМАШ, РФ	MCC

На рис. 1 приведена диаграмма участия по годам перечисленных выше организаций в программе

IGLOS-PP и ее продолжении в рамках нового международного проекта под эгидой IGS.

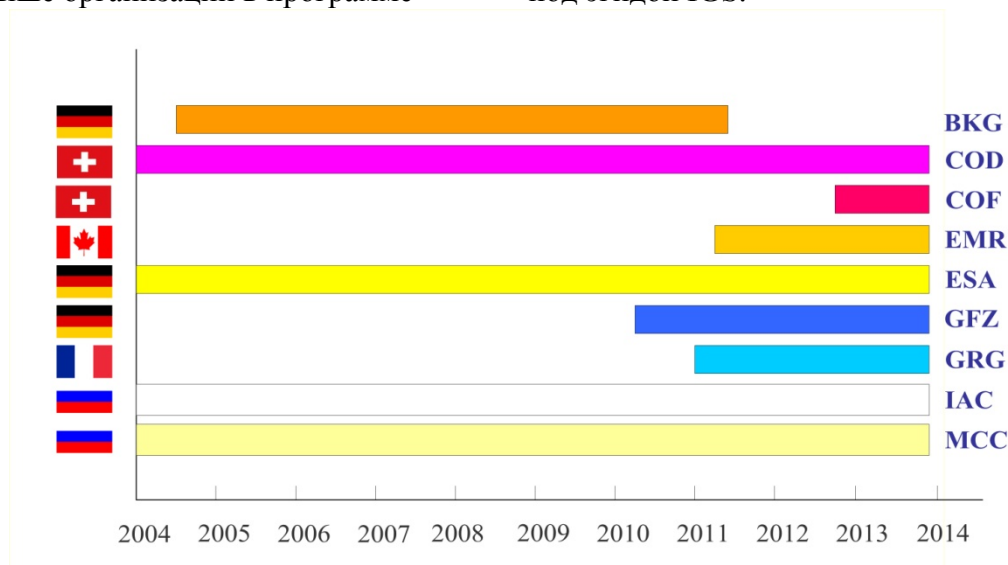


Рис. 1. Временная диаграмма участия организаций в международной программе IGLOS-PP и ее продолжении

Из диаграммы видно, что вначале на протяжении шести с лишним лет всего 5 организаций принимали участие в международной программе по вычислению опорных значений координат и поправок часов КА ГЛОНАСС. За последние два года количество участников увеличилось до девяти (включая Центр-координатор). Это свидетельствует о возросшем в последнее время интересе к программе среди зарубежных организаций и к продуктам, выпускаемым в рамках этой программы, во всем мире.

Отсутствие в РФ метрологической службы, предоставляющей аналогичные данные по КА ГЛОНАСС, побудило авторов данной статьи к разработке программного

обеспечения для формирования опорных значений координат и поправок часов КА ГЛОНАСС. Кроме того, возрастающая роль данных по орбитам КА ГЛОНАСС, используемых в решении многих прикладных задач космической геодезии, диктует необходимость иметь такие продукты, создаваемые уполномоченной российской организацией, которые могли бы служить официальными данными на территории РФ (как известно, российские Центры ИАЦ и Система высокоточного определения эфемерид и временных поправок («СВОЭВП»), а также ряд зарубежных Центров, перечисленных в таблице 1, регулярно формируют и выкладывают на свои серверы оперативные и уточненные данные с коор-

динатами и поправками часов КА ГЛОНАСС. В данной работе речь идет об *апостериорных* высокоточных данных, полученных на основе соответствующей обработки результатов упомянутых Центров. Аналогичные продукты создает в настоящее время для КА GPS IGS (США), а для КА ГЛОНАСС – NOAA/NGS (США)).

Следует отметить, что ФГУП «ВНИИФТРИ» является ведущим институтом РОССТАНДАРТА в области координатно-временных определений.

### 1. Построение опорных значений координат и поправок часов КА ГЛОНАСС во ФГУП «ВНИИФТРИ».

Основные принципы построения опорных значений координат и поправок часов КА на основе совместной (комбинированной) обработки данных отдельных Центров обработки и анализа данных (далее – ЦОАД или Центров) описаны в [2, 3].

К настоящему времени во ФГУП «ВНИИФТРИ» на основе этих принципов разработаны алгоритм и написана программа формирования сводной апостериорной эфемеридно-временной информации для КА ГЛОНАСС.

В ней осуществляется:

- построение опорных значений координат и поправок часов КА ГЛОНАСС;

- анализ и устранение выбросов в определении координат спутников отдельными Центрами в от-

дельные эпохи;

- выявление и устранение «плохих» спутников из процесса формирования опорных значений координат и поправок часов (под данным термином подразумеваются спутники, координаты которых определены отдельным Центром не достаточно точно, например, ввиду обработки неполного объема данных или по каким-либо другим причинам. Учет данных с такими спутниками может привести к значительному искажению результирующих опорных значений. Для выявления «плохих» спутников разработана специальная процедура фильтрации);

- применение аппарата орбитальной динамики с построением многосуточных (1,3,5,7- суток) орбит для анализа данных.

Программа формирует файлы отчетов двух типов:

- Sp3-файлы (Standard Product 3 – формат, принятый IGS в качестве стандарта для представления координат и поправок часов КА) с опорными значениями координат и поправок часов спутников ГЛОНАСС (ежесуточно);

- Sum-файлы отчетов за 8-суточный период со статистическими, точностными, орбитальными и другими характеристиками как спутников, так и отдельных Центров (еженедельно).

*Примечание 1.* Опорные значения координат относятся к системе ITRF. Опорные значения поправок часов относятся к системному времени ГЛОНАСС.

*Примечание 2.* Файлы отчетов, создаваемые программой, имеют префикс “VNF” и выкладываются ежедневно на FTP-сервер ФГУП ВНИИФТРИ.

*Примечание 3.* При формировании опорных значений используются данные всех Центров, участвующих в программе IGLOS-PP (см. табл. 1), а также «СВОЭВП», РФ.

Программа позволяет преобразовывать результаты к системному времени GPS и рабочей земной системе координат ГЛОНАСС ПЗ90.02 в случае возникновения такой необходимости.

Определяемые в процессе обработки веса данных каждого ЦОАД позволяют уменьшить эффект влияния наиболее грубых значений. Для приведения данных каждого ЦОАД к единой системе отсчета каждые сутки и для каждого Центра определяются семь параметров преобразования Гельмерта. Чтобы уменьшить влияние грубых данных отдельных спутников, при этом оценивании используется назначение весов для данных каждого из КА на основе анализа результатов определения их координат и поправок часов. Для приведения поправок часов Центров к единой шкале времени – системному времени ГЛОНАСС, определяются смещение и дрейф данных отдельных Центров.

Для выявления «плохих» спутников, вносящих большие погрешности в определение опорных значений координат, разработана специальная процедура, основанная на

анализе полученных результатов с помощью теории орбитальной динамики с построением 7-суточных орбит КА каждого из Центров. При этом данные о координатах, представленные в SP3-файлах, рассматриваются как псевдонаблюдения. Выявленные отдельно для каждого из Центров «плохие» спутники исключаются из обработки при определении опорных значений координат.

В программе предусмотрено автоматическое формирование ежесуточных SP3-файлов с опорными значениями координат и поправок часов КА ГЛОНАСС, а также еженедельных файлов-отчетов, в которых содержатся оценки точностных характеристик данных каждого из Центров, статистическая, орбитальная и другая информация.

SP3-файлы формируются ежедневно и содержат опорные значения координат и поправки часов для всех КА ГЛОНАСС, вошедших в Sp3-файлы хотя бы одного из Центров. Опорные значения КА приводятся вместе с кодами точности по координатам с 15-минутным интервалом, начиная с 00:00 часов текущих суток. В заголовочной части файла помимо стандартной информации приводятся также суммарные коды точности по каждому из КА. Фрагмент Sp3-файла приведен на рис. 2.

```

#сP2011 2 2 0 0 0.00000000 96 ORBIT IGS05 HLM VNF
## 1621 259200.00000000 900.00000000 55594 0.00000000000000
+ 22 R01R02R05R06R07R08R09R10R11R12R13R14R15R16R17R18R19
+ R20R21R22R23R24 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
+ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
+ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
+ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 4 4 3 4 4 3 3 4 3 3 0 4 4 4 4 4 4 4
++ 4 4 3 4 5 0 0 0 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
%с R сс GPS ссс сссс сссс сссс сссс сссс сссс сссс сссс сссс
%с сс сс сс сс сс сс сс сс сс сс сс сс сс сс сс сс сс сс сс
%F 1.2500000 1.025000000 0.00000000000 0.000000000000000
%F 0.0000000 0.000000000 0.00000000000 0.000000000000000
%i 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
%i 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
/* FINAL ORBIT COMBINATION FROM WEIGHTED AVERAGE OF:
/* bkg cod esa gfg grg iac svo
/*
/*
* 2011 2 2 0 0 0.00000000
PR01 4487.222185 11043.562230 -22551.001583 -181.434734 15 16 13
PR02 16430.412793 -4698.267312 -18946.729238 -207.854539 15 16 15
PR05 -4413.469528 -11116.483213 22517.597511 -163.378485 12 15 11
PR06 -16044.885843 4093.379943 19391.877905 -80.429400 11 16 11
PR07 -17041.425418 18671.957139 3459.881293 -213.146140 12 15 16
PR08 -9712.084749 19916.559124 -12629.062242 -48.913682 14 12 14
PR09 -12695.357038 -8378.108556 -20458.818197 -49.873406 12 19 15
PR10 -7617.328035 9189.611764 -22540.431907 -104.024616 12 17 15
PR11 2055.390844 22694.044910 -11546.595381 -74.499484 18 15 15
PR12 10327.033981 22216.668353 6768.910642 -26.885559 15 16 13
PR13 12773.455202 8642.435511 20305.257298 -295.573240 13 16 9
PR14 7294.429818 -10258.097217 22168.824129 999999.999999 0 0 0
PR15 -2973.135508 -23084.733379 10323.355737 43.377752 15 14 17
PR16 -10409.419731 -22327.087100 -6829.276743 -41.339533 16 16 16
PR17 18488.578268 -4129.892990 -17036.117387 -286.630244 17 16 16
PR18 913.105692 -10870.365273 -23038.472288 -28.544841 20 13 18
PR19 -16718.392307 -11110.800378 -15738.936549 -154.345107 19 16 20
PR20 -25061.889319 -4751.823018 1297.317952 -76.437015 16 18 21
PR21 -18579.762774 4262.977228 16889.568599 -222.263829 18 14 15
PR22 -1442.174296 10782.897787 23071.649415 -0.218595 17 14 13
PR23 16875.962930 10958.129951 15673.203651 -244.717346 14 15 17
PR24 25058.212778 4727.404025 -753.566073 44.638528 16 18 21

```

Рис.2. Фрагмент Sp3-файла опорных значений координат и поправок часов КА ГЛОНАСС

Файл отчета формируется еженедельно и включает в себя данные за 8-суточный период.

Файл отчета содержит 5 видов таблиц:

Таблица 1а включает:  
 – средние и стандартные отклонения параметров трансформации от комбинированных орбит VNF за весь 8-суточный период для каждого из Центров;

– среднеквадратичные отклонения (СКО) орбит Центров от комбинированных орбит VNF;

– средневзвешенные СКО орбит Центров от комбинированных орбит VNF;

– параметр сдвига по времени при выравнивании временных шкал каждого из Центров;

– параметр дрейфа по времени при выравнивании временных шкал каждого из Центров;

– средневзвешенные СКО от временных поправок комбинированных орбит VNF каждого из Центров.

Таблица 1b содержит значения сигм положений спутников для комбинированных орбит, указанных в виде кодов точности в заголовках SP3-файлов орбит VNF за весь 8-суточный период для каждого из Центров.

Таблица 2 содержит ежедневные значения параметров трансформации орбит каждого Центра к комбинированной орбите VNF и поправок часов за 8-суточный период.

Таблица 3 содержит ежедневные коды точности для каждого спутника и каждого Центра, получаемые при сравнении с комбинированной орбитой и на основе орбитальной динамики, а также ряд статистических оценок.

Таблица 4 содержит ежесуточные оценки отклонений опорных значений для каждого спутника VNF, полученные из сравнений с построенными на основе орбитальной динамики многосуточными орбитами (1-7-сут.). Оценки даются в направлениях: радиальном, вдоль орбиты и по бинормали к орбите.

Таблица 3.1621.4 Неделя GPS: 1621 День: 4 MJD: 55595

PRN	Средневзвешенное							Орбитальная динамика (5 сут.)								
	bkg	cod	esa	gfz	grg	iac	svo	UNF	bkg	cod	esa	gfz	grg	iac	svo	UNF
R01H	45	42	29	36	97	29	48	17	73	86	102	92	77	50	72	65
R02H	34	29	25	42	44	24	36	12	55	100	81	87	70	79	107	76
R05	25	17	17	28	77	20	40	10	54	27	44	90	90	41	35	32
R06	24	13	21	16	56	21	62	9	56	27	41	52	80	55	46	38
R07	27	23	33	140	85	27	59	23	47	37	80	284	102	53	46	44
R08H	39	22	22	46	63	29	77	13	53	40	34	75	110	36	68	29
R09	35	17	33	29	53	34	35	12	51	39	108	90	71	41	33	46
R10	30	11	23	21	55	20	45	9	56	23	81	66	51	36	44	26
R11	37	26	27	35	52	33	45	13	60	46	66	77	100	56	45	40
R12	29	18	21	18	41	29	68	10	42	44	49	50	83	42	36	28
R13	29	15	25	12	35	20	78	10	50	49	65	34	50	39	74	30
XR14							13	0								0
R15	29	20	20	27	83	21	70	12	45	32	44	46	59	43	36	24
R16	28	13	17	40	45	22	55	9	45	31	73	52	86	35	41	35
R17E	24	14	25	50	110	48	130	17	63	37	56	121	107	57	99	42
R18E	21	9	16	36	36	24	46	8	52	48	77	107	62	57	91	52
R19E	32	20	32	34	52	38	52	13	69	115	138	151	191	108	108	103
R20E	37	22	25	29	38	39	47	11	69	81	115	107	104	82	96	75
R21E	25	16	31	37	58	15	53	12	93	73	112	117	158	84	115	81
R22E	30	19	26	22	84	30	30	12	78	70	92	81	168	62	58	53
R23E	30	16	15	21	77	25	60	11	82	102	127	107	218	110	125	103
R24E	550	58	48	47	140	180	280	47	711	1333	1334	1350	1143	1049	973	1268
RMS	122	23	26	44	71	47	82		90	116	139	154	151	105	111	109
WRMS	30	15	21	23	50	24	42		52	44	66	84	79	46	52	39
MEDI	29	17	25	29	55	25	52		53	37	65	75	80	41	45	35

Рис.3. Фрагмент файла отчета для КА ГЛОНАСС.

В качестве примера на рис.3 приведен фрагмент файла отчета (таблица 3.1621.4) по вычислению опорных значений КА ГЛОНАСС за 8-суточный период: 29 янв 2011 - 05 фев 2011 за MJD с 55590 по 55597 (MJD – Модифицированная юлианская дата).

В заголовочной части файла отчета приводится также информация о выявленных «плохих» спутниках, удаленных из процесса построения опорных значений в каждые из 8-ми суток рассматриваемого периода.

На рис. 4 приведен пример вычисления СКО орбит Центров в сравнении с опорными значениями IGL за 8-суточный период MJD=55590-55597.

Опорные значения координат получаются в результате выполнения программы в 2 этапа. На первом этапе выполняется предварительное построение опорных значений, в котором участвуют все спутники всех Центров. На втором этапе производится выявление «плохих» спутников и их удаление из процесса окончательного построения опорных значений. На рис. 4 результаты, относящиеся к предварительному этапу, маркированы “VNF\*”, окончательные результаты – “VNF”. Из графика видно, что в результате процедуры удаления «плохих» спутников из процесса построения опорных значений СКО опорных значений VNF от аналогичных данных IGL в дни MJD=55591, 55594 и 55595 уменьшилось примерно в 2 раза.

Видно также, что расхождение (СКО) в данных VNF и IGL находится на уровне 1 см. Наблюдаемые в MJD=55590, 55591, 55595 «выбросы» у SVO, GFZ и BKG соответственно практически не повлияли на величину расхождения опорных значений VNF и IGL, что свидетельствует об устойчивости опорных значений к выбросам отдельных Центров за счет гибкой процедуры назначения Центрам весовых коэффициентов.

## **2. Эксперименты по вычислению относительного положения антенн приемников, расположенных на концах базовой линии Москва-Иркутск**

Для проверки качества получаемых опорных значений были выполнены расчеты относительного положения антенн приемников, расположенных во ФГУП «ВНИИФТРИ» (Менделеево, Московская обл.) и ВС филиала ФГУП «ВНИИФТРИ» (г. Иркутск) за 2-недельный интервал (MJD=55584-55597). При этом координаты одного из приемников (в Менделеево) считались фиксированными, координаты другого (в Иркутске) вычислялись с использованием данных о координатах и поправках часов КА ГЛОНАСС отдельных ЦОАД, а также опорных значений, полученных с помощью разработанной программы.



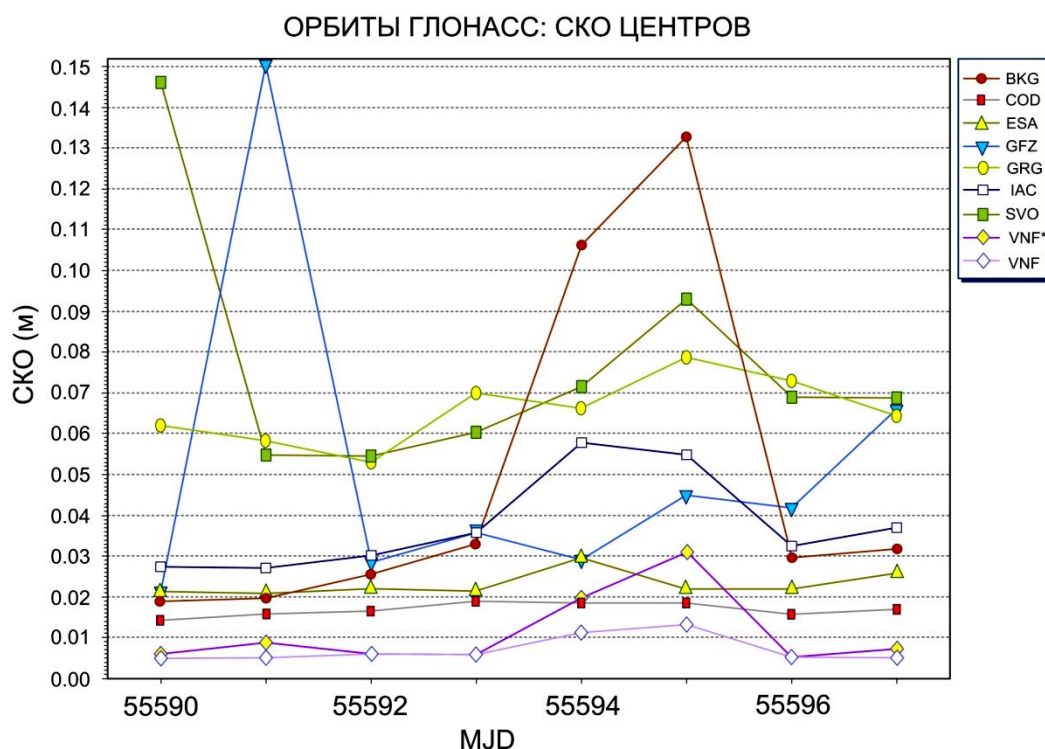


Рис.4. СКО значений координат КА ГЛОНАСС Центров от орбит IGL

В результате расчетов были получены значения координат приемника в Иркутске:  $x_{i,k}$  – при использовании данных  $i$ -го Центра и  $x_{Comb,k}$  – при использовании опорных значений, где  $k$  – номер суток рассматриваемого периода.

Аналогичные расчеты были проведены с использованием опорных значений КА GPS. По данным этих расчетов за 3-недельный период, включающий в себя исходный 2-недельный (чтобы исключить влияние концевых эффектов), был построен линейный тренд со значениями положений координат  $x_{GPS,k}$  приемника в Иркутске.

В результате в каждые сутки рассматриваемого интервала вычислялись расстояния между  $x_{i,k}$  и  $x_{GPS,k}$  для каждого из Центров, а также между  $x_{Comb,k}$  и:  $x_{GPS,k}$

$$\rho_{i,k} = \|x_{i,k} - x_{GPS,k}\|^{1/2},$$

$$\rho_{Comb,k} = \|x_{Comb,k} - x_{GPS,k}\|^{1/2},$$

затем СКО:

$$\overline{RMS}_i = \sqrt{\frac{1}{14 \cdot 3} \sum_{k=1}^{14} \rho_{i,k}^2},$$

$$\overline{RMS}_{Comb} = \sqrt{\frac{1}{14 \cdot 3} \sum_{k=1}^{14} \rho_{Comb,k}^2}.$$

Данные по СКО (Следует заметить, что значения СКО, получае-

мые при расчетах длины базовой линии оказываются примерно в 2,5 раза меньше по сравнению с СКО, получаемыми при вычислении расстояний между положениями свободного конца базовой линии. Исходя из геометрических соображений, можно показать, что значения этого коэффициента ( $=\pi^2/4$ ) для каждого из рассматриваемых Центров представлены в виде гистограммы на рис.5.

Из диаграммы видно, что точность определения разностей координат пунктов по опорным значениям (“VNF”) за рассматриваемый временной интервал незначительно уступает лишь одному из Центров, а именно “ВКГ”.

При вычислении разности координат использовалось Бернское ПО (Bernese 5.0). В качестве априорных значений параметров тропосферы (задержки в зените и тропосферных градиентов) были взяты значения, вычисленные по модели Ниелла (NMF). Эти значения затем уточнялись путем нахождения малых поправок к априорным значениям из совместной обработки результатов навигационных измерений.

сферы (задержки в зените и тропосферных градиентов) были взяты значения, вычисленные по модели Ниелла (NMF). Эти значения затем уточнялись путем нахождения малых поправок к априорным значениям из совместной обработки результатов навигационных измерений.

### 3. Оценки среднеквадратичных погрешностей определения опорных значений координат КА

В данном разделе мы делаем попытку подвести теоретический фундамент для процедуры формирования опорных значений координат КА. Основные результаты сформулированы в предложениях 1-3, дающих оценки сверху для среднеквадратичных погрешностей в определении опорных значений координат КА.

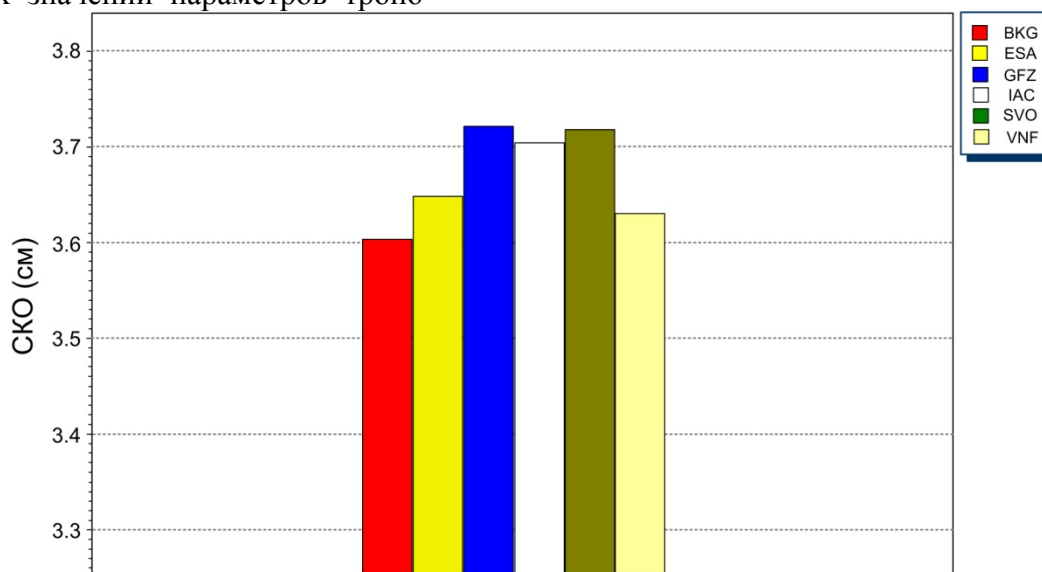


Рис.5. СКО при вычислениях относительного положения антенн приемников, расположенных на концах базовой линии Москва-Иркутск, за 2-недельный период

При наблюдаемой тенденции в улучшении качества моделирования орбит каждым из Центров (Проведенные в предыдущем разделе расчеты СКО при вычислении координат одного из концов базовой линии Москва-Иркутск, полученных по данным различных Центров, показали, что все СКО находятся в миллиметровом интервале) и постепенного выхода их на сравнимый по точности уровень интерес представляет также Следствие 2. В нем утверждается, что при равных СКП в определении координат КА отдельными Центрами за временной интервал в  $N$  суток, СКП опорных значений не превосходят СКП координат КА любого из Центров.

Обозначим:

$N_{Cent}$  - число Центров,

$N_{Sat}$  - число спутников,

$N_{Epo}$  - число эпох в сутках.

Пусть  $\mathbf{x}_{i,n}^j = (x_{1,i,n}^j, x_{2,i,n}^j, x_{3,i,n}^j)$

и  $\Delta \mathbf{x}_{i,n}^j$  обозначают соответственно радиус-вектор и вектор погрешности при оценивании орбиты  $j$ -го спутника  $i$ -м Центром в  $n$ -ю эпоху.

В соответствии с принципом построения комбинированных орбит радиус-векторы  $\mathbf{x}_{Comb,n}^j$  для опорных значений координат каждого из КА в каждую из  $N_{Epo}$  эпох определяются как средневзвешенное (с весами  $W_i$ ) координат КА, вычисляемых Центрами:

$$\mathbf{x}_{Comb,n}^j = \sum_{i=1}^{N_{Cent}} W_i \cdot \mathbf{x}_{i,n}^j ;$$

$$n=1, \dots, N_{Epo}, j=1, \dots, N_{Sat}, \quad (1)$$

где  $W_i$  - веса, назначаемые Центрам в текущие сутки:

$$W_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N_{Cent}} W_i = 1. \quad (2)$$

Из (1), (2) получаем аналогичное равенство для погрешностей  $\Delta \mathbf{x}_{Comb,n}^j$  в определении опорных значений координат КА:

$$\Delta \mathbf{x}_{Comb,n}^j = \sum_{i=1}^{N_{Cent}} W_i \cdot \Delta \mathbf{x}_{i,n}^j ;$$

$$n=1, \dots, N_{Epo}, j=1, \dots, N_{Sat}. \quad (3)$$

Обозначим:

$RMS_i$  - среднеквадратичная погрешность вычисления орбит всех спутников  $i$ -м Центром за все эпохи,  
 $RMS_{Comb}$  - среднеквадратичная погрешность опорных значений координат всех спутников за все эпохи.

Согласно определению СКП

$$RMS_i = \left( \frac{1}{3N_{Epo}N_{Sat}} \sum_{j=1}^{N_{Sat}} \sum_{n=1}^{N_{Epo}} \|\Delta \mathbf{x}_{i,n}^j\|^2 \right)^{1/2}, \quad (4)$$

$$RMS_{Comb} = \left( \frac{1}{3N_{Epo}N_{Sat}} \sum_{j=1}^{N_{Sat}} \sum_{n=1}^{N_{Epo}} \|\Delta \mathbf{x}_{Comb,n}^j\|^2 \right)^{1/2}, \quad (5)$$

где  $\|\cdot\|$  - Эвклидова норма в  $\mathbf{R}^3$ .

Рассмотрим вектор

$$y_n^j = (y_{1;n}^j, y_{2;n}^j, y_{3;n}^j); \quad n=1, \dots, N_{Epo},$$

$j=1, \dots, N_{Sat}$ . Числа  $y_{l;n}^j$  образуют 3-мерную таблицу. Векторизовав ее каким-либо образом, мы получим упорядоченную конечную последовательность действительных чисел, например,

$$y = (y_{1;1}^1, y_{2;1}^1, y_{3;1}^1, y_{1;2}^1, y_{2;2}^1, y_{3;2}^1, \dots).$$

Множество векторов  $y$  образуют метрическое пространство  $l_2$  (см. [4]) с нормой:

$$\|y\|_{l_2} = \left( \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{N_{Sat}} \sum_{n=1}^{N_{Epo}} |y_{l;n}^j|^2 \right)^{1/2} =$$

$$\left( \sum_{j=1}^{N_{Sat}} \sum_{n=1}^{N_{Epo}} \|y_n^j\|^2 \right)^{1/2}$$

Сравнение с (4), (5) дает:

$$RMS_i = \left( \frac{1}{3N_{Epo}N_{Sat}} \right)^{1/2} \cdot \|\Delta x_i\|_{l_2}, \quad (6)$$

где  $\Delta x_i$  - вектор введенного метрического пространства:

$$\Delta x_i = (\Delta x_{1;i,1}^1, \Delta x_{2;i,1}^1, \Delta x_{3;i,1}^1, \Delta x_{1;i,2}^1, \Delta x_{2;i,2}^1, \Delta x_{3;i,2}^1, \dots)$$

Аналогично

$$RMS_{Comb} = \left( \frac{1}{3N_{Epo}N_{Sat}} \right)^{1/2} \cdot \|\Delta x_{Comb}\|_{l_2}. \quad (7)$$

Запишем (3) в виде векторов из:  $l_2$

$$\Delta x_{Comb} = \sum_{i=1}^{N_{Cent}} W_i \cdot \Delta x_i. \quad (8)$$

Применив к (8) неравенство Минковского (см. [4]), получим

$$\|\Delta x_{Comb}\|_{l_2} \leq \sum_{i=1}^{N_{Cent}} W_i \cdot \|\Delta x_i\|_{l_2}.$$

Отсюда с учетом (6), (7), приходим к следующему утверждению:

**Предложение 1.** Для средне-квадратичных погрешностей опорных значений координат КА, определяемых (1)-(2), справедливо неравенство

$$RMS_{Comb} \leq \sum_{i=1}^{N_{Cent}} W_i \cdot RMS_i. \quad (9)$$

Это неравенство в частности гарантирует, что

$$RMS_{Comb} \leq \max_i \{ RMS_i \}.$$

Дальнейший анализ неравенства (9) достаточно сложен без априорных предположений относительно весов  $W_i$ . Мы докажем менее сильное, но более простое для анализа неравенство, используемое нами в дальнейшем. Прежде всего, выведем еще одно полезное неравенство, непосредственно вытекающее из (9).

**Следствие 1.** Справедливо неравенство

$$RMS_{Comb}^2 \leq \sum_{i=1}^{N_{Cent}} W_i \cdot RMS_i^2. \quad (10)$$

Для доказательства (10) применим к правой части (9) неравенство Коши:

$$\begin{aligned}
 RMS_{Comb} &\leq \sum_{i=1}^{N_{Cent}} W_i \cdot RMS_i = \\
 \sum_{i=1}^{N_{Cent}} (W_i)^{1/2} \cdot (W_i^{1/2} \cdot RMS_i) &\leq \\
 \left( \sum_{i=1}^{N_{Cent}} (W_i^{1/2} \cdot RMS_i)^2 \right)^{1/2} &= \\
 = \left( \sum_{i=1}^{N_{Cent}} W_i \cdot RMS_i^2 \right)^{1/2}, &
 \end{aligned}$$

откуда и следует (10).

Имеет место следующее:

**Предложение 2.** Пусть назначаемые Центрам веса  $W_i$  ( $i=1, \dots, N_{Cent}$ ) связаны со среднеквадратичными погрешностями  $RMS_i$  монотонно убывающей зависимостью.

Тогда для среднеквадратичных погрешностей опорных значений координат КА, определяемых (1)-(2), справедливы неравенства

$$RMS_{Comb} \leq \frac{1}{N_{Cent}} \sum_{i=1}^{N_{Cent}} RMS_i, \quad (11)$$

$$RMS_{Comb}^2 \leq \frac{1}{N_{Cent}} \sum_{i=1}^{N_{Cent}} RMS_i^2. \quad (12)$$

Неравенства (11), (12) получаются непосредственным применением

ем к (9), (10) доказанного в дополнении неравенства (Д4).

Из этих неравенств видно, что влияние СКП каждого отдельного Центра на опорные значения координат тем меньше, чем больше Центров учитывается при их определении. В этом проявляется устойчивость опорных значений к «выбросам» отдельных Центров.

Из (11), (12) видно также, что чем больше Центров предоставляют высокоточные данные, тем точнее найденные опорные значения.

Рассмотрим некоторый временной интервал из  $N$  суток. Обозначим СКП орбит  $i$ -го Центра на всем этом интервале  $\overline{RMS}_i$ , а СКП опорных значений  $\overline{RMS}_{Comb}$ .

**Предложение 3.** Пусть условия предложений 1, 2 выполнены в каждые сутки рассматриваемого временного интервала.

Тогда справедливо неравенство

$$\overline{RMS}_{Comb}^2 \leq \frac{1}{N_{Cent}} \sum_{i=1}^{N_{Cent}} \overline{RMS}_i^2. \quad (13)$$

Действительно, введем индекс  $k$ , означающий номер суток, и запишем неравенство (12) в произвольные  $k$ -е сутки:

$$RMS_{Comb,k}^2 \leq \frac{1}{N_{Cent}} \sum_{i=1}^{N_{Cent}} RMS_{i,k}^2,$$

$k=1, \dots, N$ .

Беря среднее по  $k$  от обеих частей, получаем

$$\overline{RMS}_{Comb}^2 \stackrel{def}{=} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N RMS_{Comb,k}^2 \leq$$

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{1}{N_{Cent}} \sum_{i=1}^{N_{Cent}} RMS_{i,k}^2 =$$

$$\frac{1}{N_{Cent}} \sum_{i=1}^{N_{Cent}} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N RMS_{i,k}^2 =$$

$$\frac{1}{N_{Cent}} \sum_{i=1}^{N_{Cent}} \overline{RMS}_i^2,$$

что и требовалось.

Из неравенства (13) очевидно вытекает

**Следствие 2.** Пусть выполнены условия предложения 3. Предположим, что СКП орбит всех Центров на всем интервале из  $N$  суток равны между собой:  $\overline{RMS}_i = \alpha$ ,  $i=1, \dots, N_{Cent}$ .

Тогда СКП за рассматриваемый интервал для опорных значений координат не превышает СКП для орбиты каждого из Центров:  $\overline{RMS}_{Comb} \leq \alpha$ .

#### 4. Выводы

При равном качестве определения орбит Центрами на некотором временном интервале опорные значения для координат КА дают не большее СКП, чем любой из Центров (следствие 2).

Опорные значения КА устойчивы к выбросам Центров. Влияние выброса отдельного Центра на опорные значения обратно пропорционально числу Центров.

За счет гибкой стратегии формирования весов опорные значения по точности их определения всегда находятся в числе Центров-лидеров (из анализа расчета базовой линии Москва-Иркутск).

Точность опорных значений КА увеличивается за счет выявления и фильтрации плохо смоделированных спутников отдельных Центров, а также за счет выявления и устранения выбросов в определении орбит спутников отдельных Центров в отдельные эпохи.

Автоматическая система формирования SP3-файлов с опорными значениями КА и еженедельных отчетов предоставляет информацию по координатам и поправкам часов КА, а также статистическим и др. орбитальным характеристикам КА каждого из Центров.

Статистические характеристики орбитальных систем Центров проводятся на основе многосуточной (1-7 суток) орбитальной динамики, повышающей достоверность предоставляемых данных.

#### Литература

1. РМГ 91-2009 ГСИ. Совместное использование понятий «погрешность измерения» и «неопределенность измерения». Общие принципы. М.: Стандартинформ, 2009.
2. Beutler G., Kouba J. and T. Springer, 1995, Combining the orbits of the IGS Analysis Centers, Bulletin Geodesique, 69, pp 200-222.
3. Kouba J., Mireault Y. and F. Lahaye, 1995, 1994 IGS Orbit/Clock Combination and Evaluation, Appendix I of the

Analysis Coordinator Report, International GPS Service for Geodynamics (IGS) 1994 Annual Report, pp. 70-94.  
 4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

**Приложение**

**Лемма.** Для произвольных числовых последовательностей  $w_j$  и  $f_j$ ;  $j=1, \dots, n$  и  $n > 1$  справедливо равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_j \cdot \sum_{j=1}^n f_j - \sum_{j=1}^n w_j \cdot f_j = \sum_{j=1}^{n-1} (w_{j+1} - w_j) \cdot (n-j)(F_1 - F_{j+1}), \tag{П1}$$

где

$$F_j = \frac{1}{n-j+1} \cdot \sum_{l=j}^n f_l \tag{П2}$$

Доказательство. Преобразуем левую часть (П1), применив преобразование Абеля

$$\sum_{j=1}^n a_j \cdot b_j = \sum_{j=1}^{n-1} A_{j+1} \cdot (b_{j+1} - b_j) + A_1 \cdot b_1; \quad A_j = \sum_{l=j}^n a_l,$$

к первой и третьей суммам с  $a_j = 1$ ,  $b_j = w_j$  и  $a_j = f_j$ ,  $b_j = w_j$  соответственно.

Получим:

$$\sum_{j=1}^n w_j = \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)(w_{j+1} - w_j) + n \cdot w_1,$$

$$\sum_{j=1}^n w_j \cdot f_j =$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left( \sum_{l=j+1}^n f_l \right) \cdot (w_{j+1} - w_j) + w_1 \cdot \sum_{l=1}^n f_l \cdot$$

Подставляя найденные выражения сумм в левую часть (П1), после очевидных преобразований с учетом (П2) получаем:

$$\frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n f_j \right) \cdot \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)(w_{j+1} - w_j)$$

$$- \sum_{j=1}^{n-1} \left( \sum_{l=j+1}^n f_l \right) \cdot (w_{j+1} - w_j) =$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} (n-j)(w_{j+1} - w_j) \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{l=1}^n f_l - \frac{1}{n-j} \cdot \sum_{l=j+1}^n f_l \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (w_{j+1} - w_j) \cdot (n-j)(F_1 - F_{j+1}),$$

что и требовалось.

**Следствие 3.** Пусть  $w_j \geq w_{j+1}$ ,

$f_j \leq f_{j+1}; j=1, \dots, n-1$ . Тогда

$$\sum_{j=1}^n w_j \cdot f_j \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_j \cdot \sum_{j=1}^n f_j \quad (\text{П3})$$

Доказательство. Воспользуемся леммой. Покажем сначала, что последовательность  $F_j$ , определенная

(П2), не убывает:  $F_{j+1} \geq F_j$ .

Действительно, из определения  $F_j$

имеем:

$$F_{j+1} - F_j = \frac{1}{n-j} \cdot \sum_{l=j+1}^n f_l -$$

$$\frac{1}{n-j+1} \cdot \sum_{l=j}^n f_l =$$

$$\frac{1}{(n-j)(n-j+1)} \cdot \left[ (n-j+1) \sum_{l=j+1}^n f_l - (n-j) \sum_{l=j}^n f_l \right] =$$

$$\frac{1}{(n-j)(n-j+1)} \cdot \left[ \sum_{l=j+1}^n f_l - (n-j) \cdot f_j \right] =$$

$$\frac{1}{(n-j)(n-j+1)} \cdot \sum_{l=j+1}^n (f_l - f_j) \geq 0,$$

т.к. все разности под знаком последней суммы неотрицательны. Отсюда, в частности следует, что  $F_{j+1} \geq F_1$ .

Обратимся к правой части (П1). Т.к. в нашем случае разности  $(w_{j+1} - w_j) \leq 0$  и  $(F_1 - F_{j+1}) \leq 0$ , то все слагаемые под знаком суммы неотрицательны. Отсюда вытекает справедливость (П3).

Из следствия 3 получаем

**Следствие 4.** Пусть выполнены условия следствия 2, кроме того,

$\sum_{j=1}^n w_j = 1$ . Тогда

$$\sum_{j=1}^n w_j \cdot f_j \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_j \quad (\text{П4})$$