Проблемы космической метрологии
УДК 528.2:629.78

ОБОБЩЕННЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ОКОЛОЗЕМНОГО ПРОСТРАНСТВА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗЕМНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА ITRS

В.Ф. Фатеев

ФГУП ВНИИФТРИ, Менделеево, Московская область
fateev@vniiftri.ru

В работе на основе Общей теории относительности с помощью тензорных уравнений Максвелла и тензорных обобщенных материальных соотношений для гравитационных полей решается волновое уравнение и определяется обобщенный коэффициент преломления околоземного пространства в Международной вращающейся земной системе отсчета ITRS (International Terrestrial Reference System), Полученный коэффициент учитывает преломляющие свойства атмосферы, гравитационного поля Земли, а также полей сил инерции, возникающих в результате вращения системы ITRS; приводятся оценки релятивистских дополнений к коэффициенту преломления атмосферы, анализируются свойства обобщенной преломляющей околоземной среды.

Ключевые слова: космическая геодезия, навигация и синхронизация, электродинамика неинерциальных сред, атмосфера, гравитационное поле, релятивистские эффекты.

Введение

Развитие методов релятивистской геодезии предполагает всесторонний учет влияния гравитационного поля Земли на измерения характеристик пространства и времени, а также на условия распространения электромагнитных волн в радиоэлектронных системах космической геодезии, радионавигации и синхронизациию. Достигнутая точность измерения расстояний в системах космической геодезии, космической навигации ГЛОНАСС, GPS, GALILEO, а также РСДБ характеризуется в настоящее время миллиметровым уровнем погрешностей измерения глобальных расстояний. Точность сличения частоты разнесенных стандартов методами РСДБ характеризуется относительной погрешностью 10^{-14} [1], а достигнутая погрешность измерения времени запаздывания в космических радиолиниях навигации и синхронизации составляет десятки пикосекунд [2]. Эти достижения во многом связаны с существенным прогрессом в создании наземных и бортовых стандартов частоты и развитием методов их синхронизации. Достигнутая стабильность частоты современных стандартов уже составляет 10^{-14}-10^{-16} [3], а в ближайшей перспективе планируется достигнуть 10^{-17}-10^{-18} [4].

Вместе с тем, релятивистские поправки в измерения, вызванные влиянием гравитационного поля, а также влиянием относительного движения спутников и наземных измерителей уже соизмеримы, а в ряде случаев существенно превышают уровень инструментальных погрешностей навигационных и геодезических систем. Так, относительный релятивистский сдвиг частоты и времени в космических измерительных системах достигает 10^{-9}-10^{-10}, что на 5 – 6 порядков превышает допустимые ошибки измерений. В системах ГЛОНАСС и GPS гравитационное поле изменяет и расстояния: несоответствие между измеряемым и действительным расстоянием в этих системах достигает 6-7 мм. Для компенсации некоторых релятивистских эффектов в космических системах навигации предприняты специальные меры. Еще более ярко проявляются релятивистские эффекты при переходе к вращающимся системам отсчета, каковой является широко используемая международная земная система отсчета ITRS (International Terrestrial Reference System), жестко связанная с вращающейся Землей [5].

Достигнутый прогресс в создании высокоточных инструментальных средств космических измерений требует совершенствования электродинамических моделей распространения радиоволн в околоземном пространстве применительно к вращающимся системам отсчета, в том числе к системе ITRF.

Наземно-космические измерительные радиолинии геодезии, навигации и синхронизации пролегают, с одной стороны, в гравитационном поле Земли, пересекая атмосферу. С другой стороны, они рассматриваются из вращающейся системы ITRF. В этой системе, в силу принципа эквивалентности в Общей теории относительности, в околоземном пространстве появляется наведенное вращением дополнительное гравитационное поле (поле сил инерции), действие которого на электромагнитную волну аналогично действию истинного гравитационного поля Земли. Важнейшим показателем перечисленных условий распространения электромагнитной волны является обобщенный коэффициент преломления околоземного пространства в ITRF, учитывающий оптические свойства атмосферы, истинного гравитационного поля и поля сил инерции.

Обладая обобщенным коэффициентом преломления околоземного пространства, можно рассчитать время распространения, частоту, фазу, угол рефракции и поворот плоскости поляризации в любых космических радиолиниях с учетом гравитационных и релятивистских эффектов.

Исходные соотношения

Для современной космической прикладной электродинамики характерны два главных направления ее развития: электродинамика вакуума при наличии истинных и наведенных вращением гравитационных полей и электродинамика движущейся атмосферы без учета влияния гравитационных полей.

В электродинамике вакуума исследуется поведение электромагнитной волны как в истинном, так и в эффективном гравитационном поле, возникающем в силу принципа эквивалентности, в любых неинерциальных системах отсчета. Уравнения Максвелла в ковариантном виде, справедливые в любой системе отсчета, в отсутствие источников поля имеют вид [6,7]:

$$F_{ik;l} + F_{li;k} + F_{kl;i} = 0, \quad F^{ik}_{k} = 0, \quad i,k,l = 0,1,2,3. \tag{1}$$

Здесь точка с запятой обозначает ковариантное дифференцирование; F_{ik} и F^{ik} – ко- и контравариантные тензоры электромагнитного поля, связанные в вакууме соотношением

$$F_{ik} = g_{il} g_{km} F^{lm}, \tag{2}$$

где g_{ik} - фундаментальный метрический тензор эффективного гравитационного поля.

Важный результат релятивистской электродинамики вакуума состоит в том, что постоянное гравитационное поле можно представлять в виде оптически плотной среды с коэффициентом преломления [6,7,10]

$$n^* = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} - \frac{G_\alpha e^\alpha}{g_{00}}, \tag{3}$$

где $G_\alpha = g_{0\alpha}$ - компонент тензора g_{ik} ; e^α - орт волны; $\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3.$

В электродинамике движущихся сред с помощью тензоров электромагнитного поля F_{ik} и H_{ik} уравнения Максвелла для поля в среде записываются в виде [8]

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0; \quad \frac{\partial H_{ik}}{\partial x^k} = -j_i. \tag{4}$$

Здесь $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=ict$; j - 4-вектор плотности тока с компонентами

$$j_i = \left(i\rho, \vec{j}\right), \tag{5}$$

где ρ - плотность заряда; $\vec{j}$ - 3-вектор плотности тока.

Материальные соотношения в тензорной форме записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &H_{ik}u_i = c\varepsilon F_{ik}u_k, \\ &F_{ik}u_l + F_{kl}u_i + F_{li}u_k = c\mu\left(H_{ik}u_i + H_{kl}u_i + H_{li}u_k\right), \\ &j_i = \frac{\sigma}{c} F_{ik}u_k, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где u_k - 4-вектор скорости среды с компонентами $\Gamma\vec{v}$, $ic\Gamma$ причем $\Gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$; σ - проводимость среды; ε, μ - соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемость среды.

В инерциальной системе отсчета движущейся среде компоненты тензоров F_{iK} и H_{ik} связаны с составляющими векторов электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ по схеме

$$F_{ik} = \left(c\vec{B}, -i\vec{E}\right), H_{ik} = \left(\vec{H}, -ic\vec{D}\right). \quad (7)$$

На основании этих связей уравнения Максвелла (4) и материальные соотношения (6) представляются в виде:

$$\left.\begin{aligned} rot\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ div\vec{B} = 0, \\ rot\vec{H} &= \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + j,\ div\vec{D} = \rho, \end{aligned}\right\}, \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{D} + \frac{1}{c^2}\left[\vec{V}\vec{H}\right] &= \varepsilon\left(\vec{E} + \left[\vec{V}\vec{B}\right]\right) \\ \vec{B} + \frac{1}{c^2}\left[\vec{E}\vec{V}\right] &= \mu\left(\vec{H} + \left[\vec{D}\vec{V}\right]\right) \end{aligned}\right\}, \quad (9)$$

$$\vec{j} = \sigma\Gamma\left(\vec{E} + \left[\vec{V}\vec{B}\right]\right), \rho = \Gamma\frac{\sigma\vec{E}\vec{V}}{c^2}. \quad (10)$$

Соотношение (10) имеет простой физический смысл: это ток в движущейся проводящей среде (в ITRF это соответствует ионосфере). Второе соотношение говорит о том, что если покоящийся проводник с током электрически нейтрален, то при его движении на нем появляются электрические заряды.

Материальные уравнения (9) получены Минковским и носят его имя. Эти уравнения многократно проверены экспериментально в опытах с движущимися телами в электрическом и магнитном полях Роуландом, Рентгеном, Эйхенвальдом и Вильсоном [8,9].

В ряде практических случаев более удобны материальные соотношения в формулировке, предложенной Таммом,[13]

$$F_{ik} = S_{il}S_{km}H^{lm} \text{ или } H^{ik} = S^{il}S^{km}F_{lm}, \quad (11)$$

где S_{il} -тензор диэлектрической и магнитной проницаемости среды с ненулевыми компонентами

$$S_{00} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\mu}}, \quad S_{\alpha\beta} = -\sqrt{\mu}, \tag{12}$$

причем $S_{il}S^{ik} = \delta_i^k$, где δ_i^k - единичный тензор второго ранга.

Дисперсионное соотношение, которое определяет закон распространения свободных волн в движущейся проводящей среде, имеет вид [11]:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c} - \Gamma^2\left(n^2 - 1\right)\left(\omega - \vec{k}\vec{V}\right)^2 + i\sigma\mu\Gamma\left(\omega - \vec{k}\vec{V}\right) = 0, \tag{13}$$

где $\vec{k}$ - волновой вектор; ω - частота; V - скорость среды; $\mathrm{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$ - коэффициент преломления покоящейся среды; σ -проводимость среды.

Отсюда обобщенный коэффициент преломления движущейся среды

$$n^* = n\text{-}\left(n^2 - 1\right)\frac{\vec{V}\vec{e}}{c}. \tag{14}$$

Таким образом, классическая электродинамика описывает электромагнитные волны либо в вакууме в гравитационном поле, либо в среде вне гравитационного поля. Для космических радиолиний, проходящих в атмосфере, для системы ITRF необходимо получить обобщенное выражение для коэффициента преломления, объединяющие формулы (3) и (14).

Основные уравнения электродинамики сред, движущихся в гравитационных полях

Для описания электромагнитной волны в проводящей атмосфере, движущейся в гравитационном поле, необходимо определить тензорную и векторную формы уравнений Максвелла и материальных соотношений.

Уравнения Максвелла в ковариантной форме, справедливые в любой неинерциальной системе отсчета, для сред с ненулевой проводимостью выражаются через ко- и контравариантный тензоры электромагнитного поля F_{ik} и H^{ik}, компонентами которых являются составляющие векторов поля $\vec{B},\vec{E}$ и $\vec{D},\vec{H}$ соответственно [6,7]:

$$\boldsymbol{F_{ik;l}} + F_{li;k} + F_{kl;i} = 0; H^{ik}_{;k} = -j^i. \tag{15}$$

Здесь точка с запятой обозначает ковариантное дифференцирование; латинские индексы принимают значения 0,1,2,3;

j^i - контравариантные компоненты 4-вектора плотности тока, определяемые выражениями

$$j^i = \left\{\frac{\rho}{\sqrt{-g_{\infty}}}\frac{\partial x^i}{\partial x^0}\right\}, \tag{16}$$

где ρ - пространственная плотность зарядов.

Уравнения Максвелла для поля в среде должны быть дополнены материальными соотношениями, выраженными через те же тензоры электромагнитного поля.

Чтобы установить удобную тензорную форму материальных уравнений для проводящей атмосферы, движущейся в гравитационном поле, воспользуемся результатами работ [15,16].

Материальные соотношения, обобщающие уравнения Минковского (6), предложены Хромых [16]:

$$g_{il}g_{km}H^{lm}u^k = \varepsilon F_{ik}u^k, \qquad e_{iklm}g^{ks}g^{lt}F_{st}u^m = c^2\mu e_{iklm}H^{kl}u^m, \tag{17}$$

где e_{ilkm} -единичный псевдотензор четвертого ранга, u^k - четырехмерный вектор скорости среды.

Эта форма наиболее удобна для описания полей в движущейся изотропной атмосфере. При этом считается, что рассматриваемая среда обладает в общем случае частотной и пространственной дисперсией:

$$\varepsilon = \varepsilon\left(\omega,\vec{k}\right), \quad \mu = \mu\left(\omega,\vec{k}\right).$$

Для описания гравитационных явлений в ионосфере целесообразно воспользоваться материальными соотношениями, обобщающими уравнение Тамма (11) и пригодными для случая анизотропных сред [15]:

$$F_{0\alpha} = S^{lm}_{0\alpha}g_{il}g_{mk}H^{ik}, \quad F_{\alpha\beta} = g_{\alpha l}g_{\beta m}S^{lm}_{ik}H^{ik}, \tag{18}$$

или, для статических гравитационных полей

$$F_{ik} = S^{lm}_{ik}g_{ls}g_{mt}H^{st}, \tag{19}$$

где S^{lm}_{ik}- тензор четвертого ранга диэлектрической и магнитной проницаемости среды. Компоненты этого тензора находятся из условия, что в инерциальной системе последние соотношения, записанные в трехмерной форме, эквивалентны уравнениям [13]:

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta, \quad B_\alpha = \mu_{\alpha\beta}H_\beta, \tag{20}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}$- тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости анизотропной среды.

Особый интерес представляет обобщение на произвольные системы отсчета третьего из соотношений(6). Используя тот же тензор поля и вектор скорости среды, выражение для контрвариантного 4-вектора плотности тока записываем в виде

$$j^i = \frac{\sigma}{c}F^{ik}u_k, \tag{21}$$

Вводя метрический тензор, отсюда получаем:

$$j^i = \frac{\sigma}{c} g^{il} g^{km} F_{lm} g_{ks} u^s, \tag{22}$$

После необходимых преобразований окончательно имеем:

$$j^i = \frac{\sigma}{c} g^{il} F_{lm} u^m, \tag{23}$$

Поля и токи в проводящей изотропной атмосфере, движущейся во вращающейся системе отсчета

Чтобы получить уравнения (15), (16), (19) в векторном виде, необходимо задать связь между компонентами тензоров F_{ik}, H^{ik} и векторов поля $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$. Эта связь однозначна лишь в инерциальной системе отсчета [см. формулу (7)]. В произвольном статическом гравитационном поле информация о метрике пространства-времени будет содержаться одновременно и в векторных уравнениях Максвелла и в материальных соотношениях. Поэтому при выборе этой связи целесообразно исходить из условия максимальной приближенности формы уравнения Максвелла к их традиционной форме в инерциальных системах. При этом вся информация о метрике гравитационного поля содержится в материальных соотношениях.

Однако различие в форме основных уравнений электродинамики носит непринципиальный характер, поскольку конечные результаты и, в частности, волновое уравнение, будут одними и теми же при любой связи между тензорами и векторами поля.

Установим соотношение между векторами и тензорами поля в виде

$$\left.\begin{aligned} D^\alpha &= -\sqrt{-g} H^{0\alpha}, cB^\alpha = -\frac{1}{2} e^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta\gamma}, \\ E_\alpha &= F_{0\alpha}, H_\alpha = -\frac{c}{2}\sqrt{-g} e^{\alpha\beta\gamma} H^{\beta\gamma}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

При этом тензоры поля имеют компоненты

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ -E_2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ -E_3 & cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H^{ik}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{D^1}{\sqrt{-g}} & -\frac{D^2}{\sqrt{-g}} & -\frac{D^3}{\sqrt{-g}} \\ \frac{D^1}{\sqrt{-g}} & 0 & -\frac{H_3}{c\sqrt{-g}} & \frac{H_2}{c\sqrt{-g}} \\ \frac{D^2}{\sqrt{-g}} & \frac{H_3}{c\sqrt{-g}} & 0 & \frac{H_1}{c\sqrt{-g}} \\ \frac{D^3}{\sqrt{-g}} & -\frac{H_2}{c\sqrt{-q}} & \frac{H_1}{c\sqrt{-q}} & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Учитывая, что в произвольной системе отсчета 4-вектор плотности тока (19) имеет компоненты

$$j^i=\left\{\frac{\rho}{\sqrt{-g_{00}}};\frac{1}{c\sqrt{-g_{00}}}\vec{j}\right\}, \tag{26}$$

уравнения Максвелла (18) получаем в виде:

$$\begin{gathered} rot\vec{E}=-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\alpha}=0, \\ rot\vec{H}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{j},\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial D^\alpha}{\partial x^\alpha}=\rho. \end{gathered} \tag{27}$$

При этом учтено, что контравариантные компоненты вектора $rot\vec{a}$ определяются соотношением [6]

$$\left(rot\vec{a}\right)^\alpha=\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta}-\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma}\right), \tag{28}$$

где γ - определитель трехмерного метрического тензора с компонентами

$$\gamma_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}-\frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}. \tag{29}$$

В частном случае инерциальной системы отсчета (γ =1) уравнения (27) сводятся к традиционной форме (8).

Используя соотношения (24), материальные соотношения (17), получаем в следующем виде:

$$\vec{D}+\frac{\gamma}{c^2\sqrt{-g}}\left[\vec{V}\vec{H}\right]=\frac{\gamma\varepsilon}{\sqrt{-g}}\left(\vec{E}+\left[\vec{V}\vec{B}\right]\right)-\frac{\sqrt{\gamma}}{cg_{00}}\left[\vec{H}\vec{G}\right], \qquad (30)$$

$$\vec{B}+\frac{\gamma}{c^2\sqrt{-g}}\left[\vec{E}\vec{V}\right]=\frac{\gamma\mu}{\sqrt{-g}}\left(\vec{H}+\left[\vec{D}\vec{V}\right]\right)-\frac{\sqrt{\gamma}}{cg_{00}}\left[\vec{G}\vec{E}\right], \qquad (31)$$

где $G_\alpha = g_{0\alpha}$ - пространственно-временной компонент тензора g_{ik}. При выводе этих соотношений произведения вида VG/c опущены вследствие их малости и учтено, что [6]:

$$u^0=\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}-g_{0\alpha}\frac{V^\alpha}{c}g_{00}\right),\quad u^\alpha=\Gamma^{-1}\frac{V^\alpha}{c} \qquad . \qquad (32)$$

Пренебрегая членами, содержащими V^2/с^г, получаем более простые уравнения:

$$\vec{D}=\frac{\gamma}{\sqrt{-g}}\varepsilon\vec{E}+\frac{\sqrt{\gamma}}{cg_{00}}\left[\vec{G}\vec{H}\right]+\frac{n^2-1}{c^2}\left[\vec{V}\vec{H}\right], \qquad (33)$$

$$\vec{B}=\frac{\gamma}{\sqrt{-g}}\mu\vec{H}+\frac{\sqrt{\gamma}}{cg_{00}}\left[\vec{E}\vec{G}\right]+\frac{n^2-1}{c^2}\left[\vec{E}\vec{V}\right], \qquad (34)$$

где $n=\sqrt{\varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0}$ - коэффициент преломления среды.

Наконец, можно представить эти уравнения в удобном для вычислений виде

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\vec{D}=\varepsilon'\vec{E}+\frac{1}{c}\left[\vec{H}\vec{Y}\right],\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\vec{B}=\mu'\vec{H}+\frac{1}{c}\left[\vec{Y}\vec{E}\right], \qquad (35)$$

где $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{-g_{00}}};\mu'=\dfrac{\mu}{\sqrt{-g_{00}}};\vec{Y}=\dfrac{\vec{G}}{-g_{00}}+\dfrac{n^2-1}{c}\vec{V}$.

На основании выражений (24) и (32) уравнение (23) получаем в виде (учитываем, что $j^0=c\rho$)

$$\vec{j}=\sigma\Gamma\left(\vec{E}-\sqrt{\frac{-g_{00}}{\gamma}}\left[\vec{B}\vec{V}\right]\right);\rho_n=\frac{\sigma}{c}\Gamma\left(\frac{\vec{E}\vec{V}}{c\sqrt{-g_{00}}}+\sqrt{-g_{00}}\vec{E}\vec{G}\right). \qquad (36)$$

При выводе этих формул учтены известные тензорные соотношения [6]:

$$g^{00}=\frac{1}{g_{00}}\left(1-G_\alpha G^\alpha\right),c^\alpha=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma, \qquad (37)$$

причем произведения VG^2/c отброшены вследствие их малости.

Полученные материальные уравнения (30), (31) и (36) обобщают известную систему уравнений (9) и (10) на случай гравитационных полей.

Первое из уравнений (36) определяет ток проводимости и в отсутствие гравитационных полей сводится к классическим результатам, полученным в рамках специальной теории относительности [17]. Второе из этих уравнений определяет заряд, наведенный движением проводящей среды и гравитационным полем.

Примечательной особенностью второго уравнения (36) является то, что при вращении электрически нейтрального проводника с током $\vec{\mathrm{j}} = \sigma\vec{\mathrm{E}}$ на нем даже в отсутствие поступательного движения ($V = 0$) появляется заряд

$$\rho_n = \frac{1}{c}\sigma\vec{E}\vec{G} = \frac{1}{c^2}\vec{j}\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right] .$$

Знак заряда зависит от взаимной ориентации вектора $\vec{E}$ и вектора $\vec{G}$, который является компонентом метрического тензора. Представляет интерес то, что этот эффект не зависит от выбора начала системе отсчета, т.е. проводник может располагаться в любой точке вращающейся Земли. В инерциальной невращающейся системе $\left(\vec{G} = 0, g_{00} = -1\right)$ приходим к соотношению (10), отражающему известный результат [17]. Возможность измерения наведенных вращением дополнительных зарядов рассмотрено в работе [12].

Электромагнитная волна в изотропной проводящей среде, движущейся в неинерциальной системе отсчета

Рассмотрим распространение свободных электромагнитных волн в изотропной проводящей атмосфере с дисперсией при условии, что сторонние заряды в ней отсутствуют (ρ=0). Наведенным зарядом (36), возникающим при движении проводника с током, пренебрегаем, поскольку его величина при малом токе незначительна. В результате вторая пара уравнений (27) приобретает вид

$$rot\vec{H} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \frac{\partial D^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 .$$

(38)

Если ток $\vec{j}$ постоянен в пространстве, т.е. $\partial j^\alpha / \partial x^\alpha = 0$, то второе уравнение, как нетрудно показать, при этом условии является следствием первого. Поскольку, как отмечалось, это же относится и к первой паре уравнений (27), то система Максвелла для рассматриваемого случая сводится к двум уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} rot\vec{E} &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ rot\vec{H} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Материальное соотношение для электрической индукции (35) представим в более удобном виде

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\vec{D} = \varepsilon'\vec{E} + \frac{1}{\varpi'\sqrt{\gamma}c}\left[\vec{B}\vec{Y}\right] - \frac{1}{c^2\mu'}\left[\left[\vec{Y}\vec{E}\right]\vec{Y}\right]. \quad (40)$$

Наконец, соотношение для тока проводимости (36) представляем в более простом виде, пренебрегая малыми членами:

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} - \left[\vec{B}\vec{V}\right]\right). \quad (41)$$

Используя приведенные соотношения, выведем волновое уравнение для поля в изотропной среде, движущейся в гравитационном поле. Полагая, что характеристики среды ε, μ, σ постоянны во времени, из уравнений (35), (39), (40) и (41) получаем

$$rotrot\vec{E} = rot\left\{-\frac{\mu}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{-g_{00}}}\vec{H}\right)\right\} + rot\left\{-\frac{1}{c\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\gamma}\left[\vec{Y}\vec{E}\right]\right)\right\}, \quad (42)$$

где метрические свойства выбранной системы отсчета изменяются вдоль пути радиоволны.

Из третьего уравнения (27) на основе (40) и (41) получаем выражение для $rot\vec{H}$, которое подставляем в (42). Отбрасывая заведомо малые члены, пропорциональные $\frac{1}{c^4}$, и оставляя члены с производными от компонентов метрического тензора, выражение (42) приводим к общему виду:

$$\begin{aligned} rotrot\vec{E} = {} & \varepsilon'\mu'\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\left[\vec{Y}rot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right] - \frac{1}{c}rot\left[\vec{Y}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right] - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\vec{Y}\left[\vec{Y}\vec{E}\right]\right] - \frac{2}{c}\left[\frac{\partial\vec{Y}}{\partial t}rot\vec{E}\right] - \\ & -\frac{1}{c}rot\left[\frac{\partial\vec{Y}}{\partial t}\vec{E}\right] - \frac{1}{c}\left[\vec{Y}rot\vec{E}\right]\left(\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial\sqrt{-g_{00}}}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}rot\left[\vec{Y}\vec{E}\right]\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial t} - \sigma\mu'\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \sigma\mu'\left[\vec{V}rot\vec{E}\right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Учитывая, что g_{00}, γ для поля Земли отличаются от единицы на величину порядка $\frac{1}{c^2}$, а производные по времени из-за неравномерности вращения Земли также имеют порядок $\frac{1}{c^2}$, то для системы ITRS этими производными можно пренебречь. Поэтому члены, содержащие $\frac{d\sqrt{\gamma}}{dt}$, $\frac{d\left(\sqrt{-g_{00}}\right)}{dt}$, исключаем, и уравнение (43) существенно упрощается.

Если обладает проводимостью и дисперсией, то без изменения формы в ней распространяется лишь гармоническая волна.

В связи с этим, рассмотрим гармоническую волну вида $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$. Тогда для комплексной амплитуды $\vec{E}$ получим волновое уравнение

$$\Delta\vec{E}_0 - grad\, div\vec{E}_0 + \varepsilon'\mu'\omega^2\vec{E}_0 + i\frac{\omega}{c}rot\left[\vec{Y}\vec{E}_0\right] - i\sigma\mu'\vec{E}_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\left[\vec{Y}\left[\vec{Y}\vec{E}_0\right]\right] + \sigma\mu'\left[\vec{V}rot\vec{E}\right] = 0. \quad (44)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде двух встречных бегущих плоских волн:

$$E_0 = E_1 e^{i\vec{k}\vec{R}} + E_2 e^{-i\vec{k}\vec{R}}. \quad (45)$$

На этом основании из (44) можно получить выражение для волнового вектора.

На основании соотношений векторного анализа

$$\left.\begin{aligned} &rot\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left(\vec{b}\nabla\right)\vec{a} - \left(\vec{a}\nabla\right)\vec{b} + \vec{a}\left(\nabla\vec{b}\right) - \vec{b}\left(\nabla\vec{a}\right), \\ &\left[\vec{a}rot\vec{b}\right] = \nabla\left(\vec{a}\vec{b}\right) - \left(\vec{a}\nabla\right)\vec{b}, \\ &\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right) - \left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c}, \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

получаем:

$$\vec{k}^2 - \varepsilon'\mu'\omega^2 - 2\frac{\omega}{c}\left(\vec{Y}\vec{k}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{Y}^2 - i\sigma\mu'\left(\omega - \vec{V}\vec{k}\right) = 0 \quad (47)$$

Используя выражение для $\vec{Y}$ (35), соотношение (47) преобразуем к окончательному виду:

$$\vec{k}^2 + \frac{n^2}{g_{00}}\frac{\omega^2}{c^2} - 2\frac{\omega}{c}\left(\frac{\vec{G}\vec{k}}{-g_{00}} - \frac{n^2-1}{c}\vec{V}\vec{k}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\vec{G}}{-g_{00}} - \frac{n^2-1}{c}\vec{V}\right) - i\sigma\mu'\left(\omega - \vec{V}\vec{k}\right) = 0. \quad (48)$$

Полученное дисперсионное соотношение учитывает неоднородное гравитационное поле, движение преломляющей среды, а также влияние ее проводимости. В частных случаях распространения волны в вакууме в постоянном гравитационном поле, а также в равномерно движущейся среде соотношение (48) сводится к известным результатам [6, 17] и, в частности, к формуле (13).

Приведем уравнение (48) к виду

$$\vec{k}^2 + b\vec{k} + c = 0.$$

Решение его имеет два корня:

$$\vec{k}_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}, \tag{49}$$

где

$$b = \frac{2\omega}{c}\left(\frac{\vec{G}}{g_{00}} - \frac{n^2-1}{c}\vec{V}\right)^2 - i\sigma\mu\vec{V},$$

$$a = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\vec{G}}{g_{00}} - \frac{n^2-1}{c}\vec{V}\right)^2 + \frac{n^2}{g_{00}}\frac{\omega 2}{c^2} - i\sigma\mu\omega.$$

Для слабопроводящей атмосферы, равномерно движущейся в постоянном гравитационном поле, имеем

$$\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}'', \tag{50}$$

где

$$\vec{k}' = \frac{\omega}{\mathrm{c}}\left(\frac{n}{\sqrt{-g_{00}}}\vec{e} - \frac{\vec{G}}{g_{00}} - \frac{n^2-1}{c}\vec{V}\right); \tag{51}$$

$$\vec{k}'' = \sigma\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{e} - \sigma\mu\vec{V} \quad , \tag{52}$$

Здесь $\vec{e}$ - единичный вектор в направлении движения волны.

Представляя (51) в виде $\vec{k} = \frac{\omega}{\mathrm{c}}\vec{n}*$, получаем обобщенный коэффициент рефракции:

$$\vec{n}* = \frac{n}{\sqrt{-g_{00}}}\vec{e} - \frac{\vec{G}}{g_{00}} - \frac{n^2-1}{c}\vec{V}. \tag{53}$$

Таким образом, полученное выражение для коэффициента преломления атмосферы, движущейся в гравитационном поле, объединяет в себе приведенные выше формулы (3) и (17) и в частных случаях сводится к ним. Важно отметить, что формулу (53) нельзя получить простым сложением или перемножением коэффициентов (3) и (17).

Гравитационное поле, кроме изменения преломляющих свойств пространства-времени, изменяет и действительное расстояние между двумя точками в силу искривленности пространства. Действительно, элемент дли ны в гравитационном поле отличается от координатного расстояния и определяется с помощью трехмерного тензора (29) по формуле [6,7]:

$$d\delta = \sqrt{\gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}, \quad \alpha, \beta = 1,2,3, \tag{54}$$

где dx^α - элемент координатного расстояния в отсутствие гравитационного поля.

Используя формулу (54), приращение эйконала - оптического пути волны в гравитационном поле - для участка пути волны, отсчитываемого от $\vec{R}_1$ до $\vec{R}_2$, получим в виде:

$$\Delta\psi = \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{n}^{**} d\vec{R}\,, \tag{55}$$

где

$$d\vec{R} = \vec{e}dl, \quad dl^2 = dx^\alpha dx^\alpha = dx^2 + dy^2 + dz^2\,, \tag{56}$$

$$\vec{n}^{**} = \vec{n}^* \sqrt{\frac{\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{dx^\alpha dx^\beta}}\,, \tag{57}$$

-обобщенный коэффициент преломления околоземного пространства, учитывающий две причины изменения фазового набега: за счет изменения фазовой скорости $V_\Phi = \dfrac{c}{n^*}$ и за счет искривления радиолуча $(d\delta \neq dR)$ в гравитационном поле. На основе (53) получаем его развернутую окончательную форму:

$$\vec{n}^{**} = \left(\frac{n\vec{e}}{\sqrt{-g_{00}}} - \frac{\vec{G}}{g_{00}} - \frac{n^2 - 1}{c}\vec{V} \right) \sqrt{\frac{\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{dx^\alpha dx^\beta}}\,. \tag{58}$$

Метрические свойства гравитационного поля во вращающейся геоцентрической системе отсчета ITRS

Чтобы связать формулы (53)–(58) с параметрами вращения Земли и ее гравитационным полем, зададим в качестве основы для дальнейших вычислений метрический тензор невращающейся небесной системы отсчета ICRS, который имеет следующие компоненты [18]:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\varphi_З}{c^2}\right) + O\left(c^{-4}\right), \quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\left(1 + \frac{2\varphi_З}{c^2}\right) + O\left(c^{-4}\right), \quad g_{0\alpha} = -\frac{4\varphi_\alpha}{c^3} + O\left(c^{-5}\right), \tag{59}$$

где $O\left(c^{-4}\right), O\left(c^{-5}\right)$ обозначают пренебрежимо малые члены; $\delta_{\alpha\beta}$ - единичный тензор второго ранга; $\varphi_З$ - скалярный гравитационный потенциал поля Земли в околоземном пространстве, представляемый обычно в виде разложения по сферическим функциям (поля других небесных тел в данной задаче не учитываем); φ_α - векторный потенциал поля, вызванный угловым моментом вращающейся Земли. Пренебрежимо малые члены, а также векторный потенциал уменьшаются с расстоянием от Земли, их максимальный вклад вблизи поверхности Земли менее 10^{-20}. Поэтому в дальнейшем в этой задаче их также не учитываем.

Переходя далее к прямоугольной геоцентрической системе координат ITRS, вращающейся вокруг оси OZ, и вычислив в новой системе пространственно-временной интервал $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, получим искомые компоненты метрического тензора системы ITRS:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\varphi_3}{c^2} - G^2\right); \quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\left(1 + \frac{2\varphi_3}{c^2}\right); g_{0\alpha} = G_\alpha\left(1 + \frac{2\varphi_3}{c^2}\right); \vec{G} = \frac{\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]}{c}. \quad (60)$$

С целью получения обозримых результатов далее аномалиями гравитационного поля пренебрегаем, а его потенциал определяем формулой

$\varphi_3 = \mu_3 / R$, где $\mu_3 = 3{,}986 \cdot 10^{14} м^3/с^2$ - геоцентрическая гравитационная постоянная; R - геоцентрическое расстояние; $\Omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5} с^{-1}$ - угловая скорость системы ITRS.

Определяя отсюда компоненты трехмерного метрического тензора (29), из формулы (54) находим выражение для пространственного элемента длины в системе ITRS:

$$d\delta^2 = \left[1 + \frac{2\varphi_3}{c^2} + \left(\vec{G}\vec{e}\right)^2\right] dl^2, \quad (60)$$

а также пространственный коэффициент, входящий в (58):

$$\sqrt{\frac{\gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}{dx^\alpha dx^\alpha}} = \frac{d\delta}{dl} = 1 + \frac{\varphi_3}{c^2} + \frac{1}{2}\left(\vec{G}\vec{e}\right)^2 = 1 + \frac{\varphi_3}{c^2} + \frac{1}{2c^2}\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]\vec{e}, \quad (61)$$

где $\vec{e}$ - орт радиолуча.

Как видно, путь радиолуча в гравитационном поле системы ITRS удлиняется, причем истинное гравитационное поле действует изотропно, а действие поля сил инерции вращения анизотропно. Действие поля этих максимально для радиолуча, лежащего в плоскости вращения и перпендикулярного текущему радиус-вектору.

Показатель преломления гравитационной среды в ITRS и анализ

Используя приведенные компоненты метрического тензора и выражение (61), из (53) и (58) получаем:

$$\vec{n}^* = n_a\left(1 + \frac{\varphi_3}{c^2} + \frac{G^2}{2}\right)\vec{e} + \vec{G}\left(1 + \frac{2\varphi_3}{c^2} + G^2\right), \quad (62)$$

$$\vec{n}^{**} = n_a\left(1 + \frac{2\varphi_3}{c^2} + \frac{G^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\vec{G}\vec{e}\right)^2\right)\vec{e} + \vec{G}\left(1 + \frac{3\varphi_3}{c^2} + G^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{G}\vec{e}\right)^2\right), \quad (63)$$

Пренебрегая малыми членами порядка $1/c^3$, получаем окончательные пригодные для практического применения выражения для коэффициента рефракции и обобщенного коэффициента преломления околоземного пространства в системе ITRS:

$$n^* = 1 + \Delta n_a + \left\{ \frac{\varphi_З}{c^2} + \frac{\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]^2}{2c^2} \right\} + \frac{1}{c}\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]\vec{e}, \qquad (64)$$

$$n^{**} = 1 + \Delta n_a + \left\{ \frac{2\varphi_З}{c^2} + \frac{\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]^2}{2c^2} + \frac{1}{2c^2}\left(\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]\vec{e}\right)^2 \right\} + \frac{1}{c}\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]\vec{e}, \qquad (65)$$

Здесь коэффициент преломления атмосферы Земли представлен в виде $n_a = 1 + \Delta n_a$, где Δn_a = 1.

В полученных формулах члены Δn_a определяют классические преломляющие свойства атмосферы. Для тропосферы $\Delta n_{тр} = 10^{-3} - 10^{-4}$, для ионосферы $\Delta n_{ион} = 10^{-5} - 10^{-6}$. Тропосфера является изотропной неоднородной преломляющей средой, поскольку ее коэффициент изменяется с высотой. По этой причине оптические и радиолучи претерпевают в этой среде рефракцию. Ионосфера в общем случае является средой анизотропной и неоднородной, причем одна и другая характеристика сильно зависят от частоты электромагнитной волны. Радиоволны в ионосфере претерпевают заметную рефракцию и дополнительную задержку, зависящую от частоты.

Все члены в фигурных скобках обладают неоднородностью и не зависят от частоты. Чисто гравитационная составляющая имеет величину, которая максимальна у поверхности Земли: при $R = 6{,}4 \cdot 10^6 м$ имеем $2\varphi_З / c^2 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-9}$. Составляющие, пропорциональные Ω^2, растут с расстоянием от центра вращения и вблизи геостационарной орбиты имеют максимальную величину, равную : $0{,}5 \cdot 10^{-10}$.

Особыми свойствами обладает последний член формул для коэффициентов преломления (64) и (65) вида $\Delta n_\Omega = \frac{1}{c}\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]\vec{e}$, который характеризует свойства «гирогравитационной» среды. Эта среда имеет цилиндрическую симметрию с образующей, параллельной оси вращения. В плоскости экватора Земли величина коэффициента этой среды изменяется от значения $1{,}55 \cdot 10^{-6}$ на поверхности Земли до 10^{-5} на геостационарной орбите, что соизмеримо с характеристиками ионосферы. Эти цифры свидетельствует о существенной неоднородности рассматриваемой среды и ожидаемом существенном влиянии ее на рефракцию радиоволн и оптических лучей. В протяженных космических радиолиниях влияние этой «гирогравитационной» среды на параметры распространения радиоволн, например, на рефракцию и на задержку, существенно выше, чем в ионосфере. Это объясняется сравнительно коротким ионосферным участком трассы распространения по сравнению, например, с трассой навигационного сигнала в системах ГЛОНАСС, GPS и GALILEO. Нетрудно показать, что дополнительная «гирогравитационная» задержка навигационного сигнала на трассе Земля - навигационный КА может достигать десятков наносекунд.

Другим замечательным свойством «гирогравитационной» среды в системе ITRS является ее анизотропность, поскольку произведение $\left[\vec{\Omega}\vec{R}\right]\vec{e}$ зависит от направления волны относительно направления вращения системы. Следствием этого свойства является изменение знака коэффициента Δn_{Ω} для встречных лучей и, соответственно, инверсия задержки и угла рефракции. Встречные оптические лучи в такой среде уже не совпадают, они распространяются по разным трассам.

Наконец, составляющая Δn_{Ω} принципиально не зависят от показателя преломления обычной атмосферы. Это свойство вращающихся систем использовано в световодных волоконных гироскопах, использующих гироскопический эффект Саньяка.

Заключение

Полученное выражение для показателя преломления околоземного пространства во вращающейся земной системе отсчета ITRS характеризует ее как оптически плотную среду, обладающую неоднородностью, анизотропностью и частотной независимостью. Гравитационные дополнения, вызванные вращением системы отсчета, соизмеримы с характеристиками ионосферы, однако по воздействию на электромагнитную волну на протяженных космических трассах существенно превосходят их.

На основе полученного показателя преломления «гирогравитационной» среды можно получить формулы для времени распространения, частоты. фазы, поляризации, а также рефракции и абберации радиолуча в системе ITRS с учетом релятивистских эффектов порядка $1/c^3$. Это соответствует погрешностям определения времени распространения $10^{-10}-10^{-11}c$ и относительных сдвигов частоты $10^{-16}-10^{-17}$, однако это планируется сделать в следующей статье.

При этом важно, что при определении этих параметров волны не нужно каждый раз пользоваться методами общей теории относительности. Вводимое определение показателя преломления околоземного пространства в системе ITRS позволяет пользоваться классическими методами теории распространения радиоволн.

Границы околоземной «гирогравитационной» преломляющей среды в системе ITRS целесообразно установить в пределах геостационарной орбиты.

Литература

1. Жуков Е.Т., Иванов Д.В., Курдубов С.Л. Сличение удаленных

стандартов частоты и времени методом РСДБ. Материалы 4-й Всероссийской конференции «Фундаментальное и прикладное координатно-временное и навигационное обеспечение (КВНО-2011)», С-Петербург, 10-14 окт., 2011 г.// в кн. «Труды ИПА РАН», вып. 23, 2012,с. 125-130.

2. Садовников М.А., Федотов А.А., Шаргородский. Высокоточная односторонняя дальнометрия: состояние и перспективы применения в ГЛОНАСС, там же, с. 61-69.

3. Донченко С.И., Блинов И.Ю., Гончаров А.С. и др. Состояние и перспективы развития Государственного первичного эталона единиц времени, частоты и национальной шкалы времени ГЭТ 1-2012// Материалы VII Международного симпозиума “Метрология времени и пространства», Суздаль, 2014. 17-19 сентября., с.7-8

4. Bloom B.J., Nicholson T.L., Williams J.R. e.a. An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10-18 level // Nature, 2014, v. 506, pp 71-75.

5. Petit G. and Lusum B. International Earth Rotation and Reference System Servis (IERS) Conventions (2010) // IERS Technical Note, № 36, Frankfurt am Main, 2010.

6. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля. – М.:Наука, 1967, 460 с.

7. Мёллер К. Теория относительности. – М.: Атомиздат, 1975. 400 с.

8. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1983, 620 с.

9. Тамм И.Е. Основы теории электричества. –М.:Наука, 1976, 616 с.

10. Фок В.А. теория пространства, времени и тяготения. –М.: ГИФМЛ, 1961, 564 с.

11. Болотовский Б.М., Столяров С.Н. современное состояние электродинамики движущихся сред (безграничные среды), в кн.: Эйн штейновский сборник, 1974. –М.: Наука, 1976, с. 179-277.

12. Фатеев В.Ф. Новые гироскопические эффекты в электродинамических системах// Успехи современной радиоэлектроники. №3, 2010, с. 23-27

13. Тамм И.Е. Журнал русского физико-химического общества (часть физическая), т. 56, 1924, с.248

14. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. Физматгиз. 1963.

15. Коростелев А.А., Фатеев В.Ф. Электродинамика движущихся сред в неинерциальных системах отсчета применительно к процессам в кольцевом резонаторе// Оптика и спектроскопия, 1978. т. 45, вып. 1, с.132-139.

16. Хромых А.М. Кольцевой генератор во вращающейся системе отсчета.//ЖЭТФ, 1966, т. 50, вып. 5, с. 281-282.

17. Угаров В.А. Специальная теория относительности. - М.: Наука, 1977, 384 с.

18. Копейкин С.М. Релятивистские системы отсчета в солнечной системе // Астрономический журнал, 1989, том 66, вып. 5, с. 1069-1080.