

## НОВЫЕ СТРАТЕГИИ В РАЗРАБОТКАХ ОПТИЧЕСКИХ СТАНДАРТОВ ЧАСТОТЫ, ОСНОВАННЫХ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОПТИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

В.Д. Овсянников<sup>1</sup>, В.Г. Пальчиков<sup>2</sup>, Х. Катори<sup>3</sup>

1. Воронежский государственный университет, 394006 Воронеж,

2. ФГУП «ВНИИФТРИ», Менделеево, Московская область,

3. Университет в Токио, Bunkyo-ku, 113-8656, Япония

*Достижения в разработках оптических стандартов частоты с неопределенностью воспроизведения единиц времени и частоты на уровне  $10^{-17}$  –  $10^{-18}$  требуют беспрецедентной точности в оценке роли неопределенностей высших порядков, обусловленных влиянием оптической решетки на сдвиг частоты «часового перехода». В настоящей статье мы предлагаем систематический расчет вкладов мультипольных, нелинейных, ангармонических эффектов в бюджет неопределенности часов на основе оптических решеток для щелочноземельно-подобных атомов Sr, Yb и Hg.*

*Ключевые слова: оптические стандарты частоты, «магические» длины волн, эффект Штарка, поляризуемости, отстройки частоты*

### Введение

В настоящее время общепринятыми международными стандартами времени и частоты являются так называемые цезиевые часы, т.е. стандарты, воспроизводящие единицы времени и частоты на основе электронного перехода между компонентами сверхтонкой структуры атома цезия  $^{133}\text{Cs}$  в основном состоянии. Принятое на сегодняшний день определение единицы времени – секунды в системе единиц СИ привязано к периоду излучения, соответствующему переходу между указанными электронными уровнями в атоме цезия  $^{133}\text{Cs}$ .

Следующим важным шагом к повышению точности и стабильности атомных часов является увеличение частоты используемых атомных переходов, т.е. переход к оптическим

стандартам времени и частоты, частота которых на несколько порядков выше частоты цезиевых микроволновых стандартов. Оптические часы могут быть реализованы с использованием переходов в долгоживущие электронные состояния в одиночных атомах или ионах, захваченных в магнито-оптическую ловушку и лазерно охлажденных в ней до температуры в несколько микрокельвинов. В настоящее время наилучшие результаты по развитию оптических часов на холодных атомах и ионах достигнуты на лабораторных установках в США (NIST), Германии (PTB), Великобритании (NPL), Франции и Японии. Получена относительная точность на уровне  $10^{-18}$  для оптических часов на электронных переходах в ионах  $\text{Al}^+$  в электромагнитной ловушке Пауля [1] и несколько единиц  $10^{-18}$  для часов на электронных переходах в нейтраль-

ных атомах Sr в оптической решетке [2]. Такая точность соответствует отставанию (опережению) в доли секунды за все время существования Вселенной (13.7 млрд. лет).

Несмотря на то, что достижения современной лазерной и спектроскопической техники уже позволяют говорить о возможностях еще большего увеличения точности в оптических стандартах частоты и времени, дальнейшее повышение точности оптических часов наталкивается на ряд фундаментальных физических проблем и ограничений, обусловленных, в частности, излучением абсолютно черного тела, что приводит к существованию предела воспроизводимости и стабильности частоты измеряемых переходов. С другой стороны, достижения в разработках оптических стандартов частоты с неопределенностью воспроизведения единиц времени и частоты на уровне  $10^{-17} - 10^{-18}$  требуют беспрецедентной точности в оценке роли неопределенностей высших порядков, обусловленных влиянием оптической решетки на сдвиг частоты «часового перехода». Одним из наиболее успешных подходов к решению этой важной проблемы, является использование так называемой «магической» длины волны лазерного поля, формирующего оптическую решетку в стандарте частоты.

Магическая длина волны (МДВ) оптической решетки, с помощью которой осуществляется захват холодных щелочноземельно-подобных атомов в ловушку в режиме Дика-

Лэмба, делает возможным наблюдение «часовых переходов» между основным ( $g$ )  $6s^2(^1S_0)$  и возбужденным ( $e$ ) метастабильным  $6s6p(^3P_0)$  состояниями атомов, свободным от доплеровских и штарковских сдвигов частоты. Результаты экспериментальных измерений магических длин волн для атомов стронция, иттербия и ртути соответственно равны:  $6s6p(^3P_0)$  (Sr атомы [3]),  $\lambda_{mag} = 759.3537$  нм (Yb атомы [4]) и  $\lambda_{mag} = 362.53$  нм (Hg атомы [5]). Для МДВ динамический эффект Штарка для основного и возбужденного состояний атомов приводит к одинаковым полевым поправкам для этих состояний, что в свою очередь обуславливает их полное взаимное сокращения в «часовом переходе» оптического стандарта частоты. Однако эквивалентность линейных по интенсивности  $I$  поля решетки штарковских сдвигов частоты, определяемыми динамическими поляризуемостями  $\alpha_e(\omega_{mag}) = \alpha_g(\omega_{mag})$  при МДВ  $\omega_{mag} = 2\pi c / \lambda_{mag}$ , вовсе не гарантирует эквивалентность вклада эффектов высшего порядка, в первую очередь поправок квадратичных по интенсивности  $I$ , определяемых гиперполяризуемостями  $\beta_e(\omega_{mag})$  и  $\beta_g(\omega_{mag})$ . Кроме того, наряду с дипольными поляризуемостями  $\alpha_{e(g)}^{E1}(\omega_{mag})$  (E1) существуют еще и мультипольные поляризуемости высшего порядка, в первую очередь

магнитно-дипольная  $\alpha_{e(g)}^{M1}(\omega_{mag})$  (M1) и электрическая квадрупольная  $\alpha_{e(g)}^{E2}(\omega_{mag})$  (E2) поляризуемости атомных состояний, которые вносят ненулевой вклад в линейный по интенсивности  $I$  динамический эффект Штарка. Поправка на мультипольные взаимодействия, хотя и имеет порядок малости на уровне  $10^{-6}$ - $10^{-7}$  по отношению к электрическому дипольному приближению E1, приводит к специфическому пространственному распределению поля в решетке, существенно отличающемуся от E1-приближения, и, следовательно, должна быть корректно учтена в прецизионных измерениях частоты. В частности, поправки E2-M1 – типов могут влиять на МДВ в зависимости от конкретных условий эксперимента. Так, в бегущей волне, для которой пространственное распределение интенсивности поля вдоль лазерного пучка является однородным, линейный по полю  $I$  штарковский сдвиг определяется суммой поляризуемостей  $\alpha_{e(g)}^{\Sigma}(\omega_{mag}^f) = \alpha_{e(g)}^{E1}(\omega_{mag}^f) + \alpha_{e(g)}^{qm}(\omega_{mag}^f)$ , где  $\alpha_{e(g)}^{qm}(\omega_{mag}^f) = \alpha_{e(g)}^{E2}(\omega_{mag}^f) + \alpha_{e(g)}^{M1}(\omega_{mag}^f)$  – сумма E2-M1 поляризуемостей. Между тем, в стоячей волне оптической решетки E2-M1-взаимодействия отстают по фазе на четверть волны от E1-взаимодействий и, следовательно, их следует вычитать из E1 поляризуемости, т.е.

$\alpha_{e(g)}^{dqm}(\omega_{mag}^s) = \alpha_{e(g)}^{E1}(\omega_{mag}^s) - \alpha_{e(g)}^{qm}(\omega_{mag}^s)$  и магическая длина волны  $\lambda_{mag}^{f(s)} = 2\pi c / \omega_{mag}^{f(s)}$  определяется по-разному для бегущей и стоячей волны оптической решетки в зависимости от двух различных условий:

$$\alpha_e^{\Sigma}(\omega_{mag}^f) = \alpha_g^{\Sigma}(\omega_{mag}^f) \quad (1)$$

- для бегущей волны и

$$\alpha_e^{dqm}(\omega_{mag}^s) = \alpha_g^{dqm}(\omega_{mag}^s) \quad (2)$$

- для стоячей волны [6]. Важно подчеркнуть, что измеряемая разность для этих двух магических длин волн  $\omega_{mag}^f$  и  $\omega_{mag}^s$ , в принципе, находится в пределах возможностей современного эксперимента, основанных на использовании лазерных решеток. Тем не менее, как будет описано в данной статье, даже минимальная отстройка МДВ может быть использована для эффективного контроля эффектов высшего порядка в бюджете неопределенностей оптических стандартов частоты и времени. Такой анализ вплоть до недавнего времени не проводился в метрологической практике.

Существуют два основных типа магических длин волн, соответствующих выбору захвата холодных атомов в ловушку: (i) притягивающий потенциал в ловушке, для которого потенциальная энергия атомов имеет минимум и захваченные атомы локализованы в окрестностях пучностей лазерной решетки (маги-

ческая длина волны с «красной» отстройкой), и (ii) отталкивающий потенциал в ловушке, в котором атомы локализируются в окрестностях узлов лазерной решетки с  $I=0$  (магическая длина волны с «голубой» отстройкой). Очевидно, что в последнем случае роль эффектов высшего порядка можно существенно снизить по сравнению со случаем «красной» отстройки. Однако для «голубой» отстройки магической длины волны необходима 3D – модификация в конструкции оптической решетки, поскольку в силу свойств отталкивающего потенциала 1D – модификация оптической решетки практически невозможна. Тем не менее, в настоящей работе мы рассмотрим оба случая (i) и (ii) оптической решетки для одномерного 1D – случая с целью анализа и оценки роли «не магических» эффектов, а также выработки возможных стратегий в разработках оптических стандартов частоты, основанных на использовании оптических решеток.

Наиболее исследованный случай оптических часов на атомах Sr детально описан нами в недавней статье [6] в базисе модельного потенциала Фьюса (МПФ) применительно к расчету атомных поляризуемостей и гиперполяризуемостей [7]. В настоящей работе мы провели новые расчеты атомных характеристик, представленных в [6], на основе переопределения параметров МПФ. В качестве критерия качества в выборе параметров МПФ являлась степень согласия теоретически рассчитанных и экспериментально измеренных

«магических» длин волн для щелочноземельно-подобных атомов Sr, Yb и Hg.

Три различные стратегии в определениях МДВ представлены в статье для каждого из атомов Sr, Yb и Hg. В дополнение к определениям МДВ, представленным формулами (1) и (2), рассмотрен также промежуточный случай эквивалентности только дипольных поляризуемостей для основных и возбужденных состояний

$$\alpha_e^{E1}(\omega_{mag}^d) = \alpha_g^{E1}(\omega_{mag}^d). \quad (3)$$

Данное определение (3) для МДВ наиболее часто используется в современной литературе. Как было впервые отмечено в [6], влияние мультипольных эффектов может обусловить появление дополнительных составляющих в бюджете неопределенностей оптических стандартов времени и частоты даже без учета эффектов пространственного распределения для электрического дипольного и мультипольного взаимодействий в поле оптической решетки.

В настоящей статье детально исследовано различие в пространственном распределении для электрического дипольного (E1) и мультипольного взаимодействий (M1 и E2) применительно к двум конфигурациям оптических решеток с «красной» и «голубой» отстройками для магических длин волн. Для краткости рассмотрен только частный случай одномерной 1D–оптической ре-

шетки. В статье представлены результаты теоретических расчетов для сдвигов частоты атомов Sr, Yb и Hg в оптической решетке. Выполнены прецизионные оценки для вкладов нелинейно-оптических эффектов высшего порядка, которые не могут быть скомпенсированными выбором МДВ и, следовательно, должны быть корректно учтены при анализе результатов измерений частоты часового перехода в оптических стандартах частоты. В статье использована атомная система единиц, в которой выполняется условие  $e = m = \hbar = 1$ . В этих единицах скорость света полагалась равной  $c = 137.036$ , а постоянная тонкой структуры определялась соотношением  $\alpha = 1/137.036$ .

### 1. Оптические решетки для «красной» отстройки магической длины волны

Индукцированный лазерным полем решетки сдвиг частоты возникает

$$V(X) = V_{E1} \cos(kX) + (V_{E2} + V_{M1}) \sin(kX), \quad (5)$$

и операторы E1-, E2- и M1- взаимодействий имеют вид

$$V_{E1} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0);$$

$$V_{E2} = \frac{\alpha\omega}{\sqrt{6}} r^2 \left( \{ \mathbf{E}_0 \otimes \mathbf{n} \}_2 \cdot \mathbf{C}_2(\theta, \varphi) \right); \quad (6)$$

$$V_{M1} = \frac{\alpha}{2} ([\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0] \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{S})).$$

Здесь  $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$  - радиус-вектор валентного электрона,  $\mathbf{C}_2(\theta, \varphi)$ - модифицированная сферическая гар-

ет как разность штарковских энергий для основного и возбужденного состояний часового перехода. Штарковские энергии определяются на основе взаимодействия захваченного в ловушку атома с векторным электрическим полем

$$\mathbf{E}(X, t) = 2\mathbf{E}_0 \cos(kX) \cos(\omega t), \quad (4)$$

осциллирующим во времени с частотой  $\omega$  в пространстве вдоль падающего лазерного пучка с волновым вектором  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$ ,  $k = \omega/c$ ,  $X$  - пространственная компонента атома, определяющая положение вектора вдоль оси лазерной решетки. Взаимодействие атома с решеткой описывается оператором

$$V(X, t) = \text{Re}\{V(X) \exp(-i\omega t)\},$$

в котором пространственный фактор определяется формулой

моника единичного вектора  $\mathbf{n}$  для угловых переменных,  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{S}$  - полный и спиновый моменты атома. С учетом членов второго и четвертого порядков по взаимодействию атомов  $V(X)$  с полем решетки, соответственно линейных и квадратичных по интенсивности поля решетки  $I$ , взаимодействия (6) определяют потенциальный барьер решетки [6] в основном (g) или возбужденном (e) состоянии

$$U_{g(e)}^{latt}(X, I) \approx -D_{g(e)}(I) + U_{g(e)}^{harm}(I)X^2 - U_{g(e)}^{anh}(I)X^4 + \dots, \quad (7)$$

где  $X$  соответствует смещению атома относительно положения равновесия  $X=0$ , а потенциальная энергия (7) отсчитывается от ее наименьшего значения

$$U_{g(e)}^{latt}(0, I) = -D(I); \text{ глубина барьера} \\ D_{g(e)}(I) = \alpha_{g(e)}^{E1}(\omega)I + \beta_{g(e)}(\omega)I^2, \quad (8)$$

определяется электрическими дипольными поляризуемостями

$$U_{g(e)}^{harm}(I) = [\alpha_{g(e)}^{dqm}(\omega)I + 2\beta_{g(e)}(\omega)I^2]k^2 = \frac{M\Omega_{g(e)}^2(I)}{2} \quad (9)$$

определяется зависящей от интенсивности собственной частотой осцилляций,  $\Omega_{g(e)}(I)$  для основного и возбужденного состояний атома в потенциальном барьере (7). Коэффициент перед четвертой степенью  $X$  определяется ангармонической поправкой низшего порядка к шар-

$$U_{g(e)}^{anh}(I) = [\alpha_{g(e)}^{dqm}(\omega)I + 5\beta_{g(e)}(\omega)I^2] \frac{k^4}{3}. \quad (10)$$

Уравнение (7) описывает потенциал решетки в пространственной области  $|X| \ll \lambda/4$ , где  $\lambda$  соответствует длине волны лазерного поля решетки; атомы в решетке локализо-

$$E_{g(e)}^{vib}(I, n) = -D_{g(e)}(I) + \Omega_{g(e)}(I) \left( n + \frac{1}{2} \right) - E_{g(e)}^{anh}(I) \left( n^2 + n + \frac{1}{2} \right), \quad (11)$$

где первый член в (11) является энергией гармонического осциллятора в состоянии с главным колебательным квантовым числом  $n$ , а второй член учитывает ангармонические поправки, возникающие из последнего члена для потенциальной

$\alpha_{g(e)}^{E1}(\omega)$  и гиперполяризуемостями  $\beta_{g(e)}(\omega)$  атомов в основном или возбужденном состоянии, зависящими от частоты поля лазерной решетки  $\omega$ . Коэффициент перед квадратом смещения

ковскому потенциалу в стоячей волне решетки, и этот коэффициент также зависит от комбинаций E1-E2-M1 поляризуемостей

$\alpha_{g(e)}^{dqm}(\omega) = \alpha_{g(e)}^{E1}(\omega) - \alpha_{g(e)}^{qm}(\omega)$  и гиперполяризуемостей в соответствии с формулой

ваны с пространственной периодичностью  $\lambda/2$ . Атом, захваченный в лазерную решетку, осуществляет колебательное движение в стационарном состоянии с энергией

энергии (7). Таким образом, индуцированный полем решетки сдвиг частоты возникает как разность осциллирующих энергий (11) атома в основном и возбужденном состояниях. Предполагая эквивалентность главных колебательных квантовых

чисел  $n$  для переходов между состояниями часового перехода (режим Лэмба-Дикэ), часовой сдвиг частоты определяется выражением:

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{cl}^{latt}(I, n) &= E_e^{vib}(I, n) - E_g^{vib}(I, n) = \\ &= -\Delta D(I) + \Delta\Omega(I)\left(n + \frac{1}{2}\right) - \Delta E^{anh}(I)\left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta D(I) &= D_e(I) - D_g(I); \\ \Delta\Omega(I) &= \Omega_e(I) - \Omega_g(I); \\ \Delta E^{anh}(I) &= E_e^{anh}(I) - E_g^{anh}(I), \end{aligned} \quad (13)$$

а разности в (13) соответствуют:

- 1) глубинам потенциальных барьеров (8);
- 2) частотам гармонических осцилляций атома в потенциале (7)

$$\Omega_{g(e)}(I) = 2\sqrt{\varepsilon^{rec}\left[\alpha_{g(e)}^{dqm}(\omega)I + 2\beta_{g(e)}(\xi, \omega)I^2\right]}. \quad (14)$$

эти частоты соотносятся с энергиями отдачи фотона как  $\varepsilon^{rec} = k^2 / (2M)$  ( $M$  - масса атома) и определяются коэффициентом (9) гармонической части потенциала (7);

3) ангармоническим поправкам к колебаниям атома в ловушке с разделенными потенциальными барьерами оптической решетки:

$$E_{g(e)}^{anh}(I) = \frac{\varepsilon^{rec}}{2} \left[ 1 + \frac{3\beta_{g(e)}(\xi, \omega)I}{\alpha_{g(e)}^{dqm}(\omega)} \right], \quad (15)$$

которые соответствуют последнему члену в правой части формулы (7).

Разность дипольных и мультипольных поляризуемостей

$\alpha_{g(e)}^{dqm}(\omega) = \alpha_{g(e)}^{E1}(\omega) - \alpha_{g(e)}^{qm}(\omega)$  (вместо суммы  $\alpha_{g(e)}^{\Sigma}(\omega) = \alpha_{g(e)}^{E1}(\omega) + \alpha_{g(e)}^{qm}(\omega)$ ,

которая возникает в случае взаимодействия атома с бегущей волной решетки), возникает вследствие сдвига на четверть периода как для временной, так и для пространственных переменных между E1 и (E2+M1) взаимодействиями атома со стоячей волной оптической решетки [9]. Как следует из уравнений (8-15), зависящая от интенсивности разность энергий, определяющая сдвиг частоты (12), может быть представлена как [6]

$$\begin{aligned} \Delta D &= \left[ \alpha_e^{E1}(\omega) - \alpha_g^{E1}(\omega) \right] I + \left[ \beta_e(\xi, \omega) - \beta_g(\xi, \omega) \right] I^2; \\ \Delta\Omega &= \Omega_e - \Omega_g = 2 \left[ \sqrt{\alpha_e^{dqm}(\omega) + 2\beta_e(\xi, \omega)I} - \sqrt{\alpha_g^{dqm}(\omega) + 2\beta_g(\xi, \omega)I} \right] \sqrt{\varepsilon^{rec} I}; \\ \Delta E^{anh} &= \frac{3}{2} \varepsilon^{rec} \left[ \frac{\beta_e(\xi, \omega)}{\alpha_e^{dqm}(\omega)} - \frac{\beta_g(\xi, \omega)}{\alpha_g^{dqm}(\omega)} \right] I. \end{aligned} \quad (16)$$

Окончательно, индуцированный полем решетки сдвиг частоты часов

вого перехода с учетом квадратичных по интенсивности поля попра-

$$\Delta v_{cl}^{latt}(n, \xi, I) = c_{1/2}(n)I^{1/2} + c_1(n, \xi)I + c_{3/2}(n, \xi)I^{3/2} + c_2(\xi)I^2. \quad (17)$$

Проводя отстройку частоты поля лазерной решетки в окрестности магических длин волн можно добиться уменьшения зависящих от интенсивностей поля значений коэффициентов  $c$  до их минимальных значений. Дробные коэффициенты в степенных зависимостях интенсивности  $I$  в формуле (17) возникают из-за корневой зависимости от  $I$  для собственных частот (14). Так, коэффициент  $c_{1/2}$  определяется разностью комбинаций поляризуемостей  $\alpha_{g(e)}^{dqm}(\omega)$ . Линейный по  $I$  член определяется главным образом разностью между электрическими дипольными поляризуемостями  $\alpha_{g(e)}^{E1}(\omega)$ ; в дополнение, существен-

нок по  $I$  можно представить в виде

но меньшая по амплитуде поправка на гиперполяризуемость для линейного члена по  $I$  возникает из-за ангармонического коэффициента (16). Коэффициенты  $c_{3/2}$  и  $c_2$  зависят от разности гиперполяризуемостей  $\Delta\beta(\xi, \omega) = \beta_e(\xi, \omega) - \beta_g(\xi, \omega)$ , входящих в определение собственных частот  $\Omega_{g(e)}$ , и глубин потенциальных барьеров.  $D_{g(e)}$ . В дополнение к зависимости от частоты лазерной решетки гиперполяризуемости зависят также от поляризаций поля решетки [10]. Эта зависимость может быть представлена в виде тензорных компонент гиперполяризуемости:

$$\beta_{g(e)}(\omega, \xi) = \beta_{g(e)}^l(\omega) + \xi^2 (\beta_{g(e)}^c(\omega) - \beta_{g(e)}^l(\omega)), \quad (18)$$

где  $\xi$  - степень циркулярной поляризации ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ),  $\beta_{g(e)}^{l(c)}(\omega)$  - зависящая от частоты гиперполяризуемость для линейной (циркулярной) поляризации поля лазерной решетки.

Противоположные знаки компонент гиперполяризуемостей  $\Delta\beta^l$  и  $\Delta\beta^c$  возникают в том случае, когда существует "магическая степень циркулярной поляризации",  $\xi_{mag} = \pm 1 / \sqrt{1 - \Delta\beta^c / \Delta\beta^l}$ , при которой разность гиперполяризуемостей

для часового перехода (18) может обращаться в ноль. Этот эффект может быть наблюдаемым на магических длинах волн в атомах Yb при  $\xi_{mag} = 0.777$  и в атомах Hg при  $\xi_{mag} = 0.705$ , как это следует из табл. 1, в которой представлены восприимчивости для атомов Sr, Yb и Hg, вычисленные в приближении модельного потенциала [7]. Для Sr атомов разности  $\Delta\beta_m^l$  и  $\Delta\beta_m^c$  при магических длинах волн, отрицательны, таким образом, магическая эллиптичность в этом случае не су-

существует и минимальное значение разности гиперполяризуемостей соответствует случаю линейной поляризации. Дополнительная колонка для атомов стронция в табл. 1 соот-

ветствует случаю магической длине волны с «голубой» отстройкой  $\lambda_{mag} = 389.889$  нм [11].

Таблица 1

Характеристики атомов Sr, Yb и Hg в оптической решетке на магических длинах волн

АТОМ	Sr		Yb	Hg
$\lambda_{mag} / \text{нм}$	813.42727	389.889	759.35374	362.53
$\alpha_m^{E1} / \left( \frac{\text{кГц}}{\text{кВт/см}^2} \right)$	45.2	- 92.7	40.5	5.70
$\Delta\alpha_m^{qm} / \left( \frac{\text{МГц}}{\text{кВт/см}^2} \right)$	1.38	- 13.6	- 8.06	8.25
$\text{Re}\{\Delta\beta_m^l\} / \left( \frac{\text{МГц}}{(\text{кВт/см}^2)^2} \right)$	- 200.0	1150	- 366.3	- 2.50
$\text{Im}\{\Delta\beta_m^l\} / \left( \frac{\text{МГц}}{(\text{кВт/см}^2)^2} \right)$	0	2.48	0	4.34
$\text{Re}\{\Delta\beta_m^c\} / \left( \frac{\text{МГц}}{(\text{кВт/см}^2)^2} \right)$	- 311.0	1550	240.2	2.53
$\text{Im}\{\Delta\beta_m^c\} / \left( \frac{\text{МГц}}{(\text{кВт/см}^2)^2} \right)$	0	2.37	0	6.37
$\Omega_m / \sqrt{\Gamma} \left( \frac{\text{кГц}}{\sqrt{\text{кВт/см}^2}} \right)$	25.05	74.8	18.03	13.1
$10^9 \cdot \frac{\partial(\Delta\alpha_m^{E1})}{\partial\omega} / \frac{1}{\text{кВт/см}^2}$	0.254	10.3	0.720	0.134
$\mathcal{E}^{rec} / \text{кГц}$	3.47	15.1	2.00	7.57

В области  $758.5 < \lambda_{lat} < 759.7$  нм, близкой к области двухфотонного резонанса на уровне  $6s8p(^3P_0)$  для линейно поляризованной волны решетки (см. рис. 1), эта область соответствует магической длине волны  $\lambda_{mag} = 759.3537$  нм [4]. Здесь компоненты гиперполяризуемости  $\Delta\beta^l$  и

$\Delta\beta^c$  имеют противоположный знак, как это следует из расчетных данных (см. рис 1). Аналогичная ситуация не возникает в окрестности  $\lambda_{mag} = 813.42727$  нм [3] для атома Sr, хотя аналогичная область противоположных знаков существует меж-

ду узлами решетки  $\Delta\beta^c$  и  $\Delta\beta^l$  при  $\lambda = 800$  и  $\lambda = 803$  нм соответственно, которые располагаются довольно далеко от  $\lambda_{mag}$ , как показано на рис. 2.

Необходимо отметить, что наряду со сдвигом частоты, ассоциируемым с действительной частью гиперполяризуемости  $\Delta\beta^{l(c)}$ , возбужденные часовые состояния атомов Hg на магической длине волны испытывают сопоставимое по амплитуде уширение, обусловленное двухфотонной ионизацией и описываемой мнимой частью гиперполяризуемости. Значение  $\text{Im}[\Delta\beta^{l(c)}]$  является положительным для произвольной поляризации поля лазерной

решетки. Перечисленные эффекты описываются коэффициентами  $c$  (за исключением  $c_{1/2}$ , которые не содержит поправки на гиперполяризуемости), вводимыми как мнимая часть сдвига (17).

В противоположность атомам Hg, мнимая часть гиперполяризуемости для Sr атомов в решетке для голубой отстройки магической длины волны по порядку величины на три порядка меньше, чем реальная часть гиперполяризуемости. Таким образом, уширение линии часового перехода в этом случае пренебрежимо мало в сравнении со сдвигом частоты.

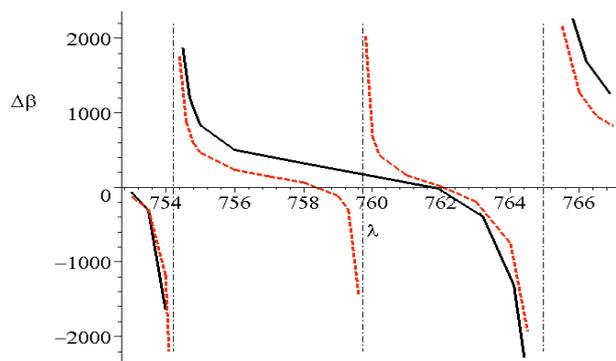


Рис. 1. Зависимость от длины волны  $\lambda$  (в нанометрах) для гиперполяризуемости (в единицах  $\mu\text{Гц}/(\text{kВ}/\text{см}^2)^2$ ) для часового перехода в атомах Yb для линейной (пунктирная кривая) и циркулярной (сплошная кривая) поляризации лазерной волны оптической решетки. Вертикальные линии обозначают положения двухфотонных резонансов на  $6s8p(^3P_2)$  уровне и длине волны 754.226 нм, на  $6s8p(^3P_0)$  -уровне на длине волны 759.71 нм (этот резонанс возникает только для линейной поляризации) и на  $6s5f(^3F_2)$  -уровне на дине волны 764.953 нм.

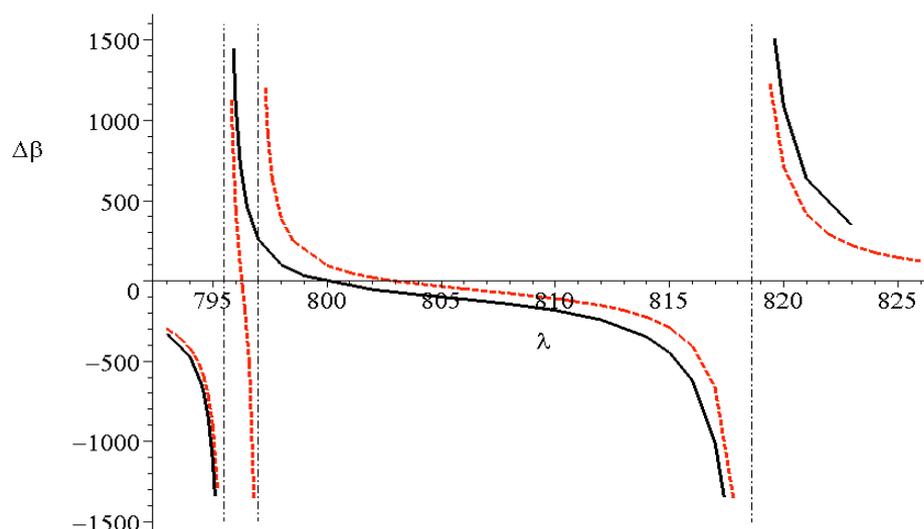


Рис. 2. Зависимость от длины волны  $\lambda$  (в нанометрах) для гиперполяризуемости (в единицах  $\mu\text{Гц}/(\text{кВ}/\text{см}^2)^2$ ) для часового перехода в атомах Sr для линейной (пунктирная кривая) и циркулярной (сплошная кривая) поляризации лазерной волны оптической решетки. Вертикальные линии обозначают положения двухфотонных резонансов на  $65s7p(^3P_2)$  – уровне и длине волны 795.5 нм, на  $5s7p(^3P_0)$  – уровне на длине волны 797 нм (этот резонанс возникает только для циркулярной поляризации) и на  $5s4f(^3F_2)$  – уровне на длине волны 7818.6 нм.

## II. Стратегии для определения магической длины волны «красной» отстройки

Очевидно, что главная поправка в штарковскую энергию (11) атома в ловушке на магической длине волны лазерного поля определяется E1-поляризуемостью, которая превосходит M1-E2 поляризуемости более чем на 6 порядков. Следовательно, разница в магических длинах волн, определяемых формулами (1-3), может проявляться лишь на уровне шестого десятичного знака. Тем не менее, эта разность может существенно влиять на численные значения коэффициентов при целых и дробных степенях интенсивности лазерного поля и, следовательно, на сдвиг час-

тоты часового перехода (17). Ниже в этом разделе будут рассмотрены 3 различных подхода к определению магических длин волн, а также представлены численные значения для всех коэффициентов.

### Эквивалентность сдвигов часовых уровней в бегущей волне

Электрическое дипольное E1, электрическое квадрупольное E2 и магнитнодипольное взаимодействия атома с полем бегущей волны синхронны. Следовательно, сдвиг в первом порядке по интенсивности поля  $I$  определяется суммой поляризуемостей  $\alpha_{g(e)}^{\Sigma}(\omega)$ . Для исключения сдвига первого порядка по полю используется настройка частоты поля

на магическую длину волны бина потенциала (8) и все коэффициенты в правой части уравнения (17) имеют ненулевые значения:

$$c_{1/2}^t(n) = -2\Delta\alpha_t^{qm} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_t^{rec}}{\alpha_t^\Sigma}} \left(n + \frac{1}{2}\right); \quad c_1^t(\xi, n) = \Delta\alpha_t^{qm} - \frac{3\mathcal{E}_t^{rec}}{2\alpha_t^\Sigma} \Delta\beta_t(\xi) \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right);$$

$$c_{3/2}^t(\xi, n) = 2\Delta\beta_t(\xi) \sqrt{\frac{\mathcal{E}_t^{rec}}{\alpha_t^\Sigma}} \left(n + \frac{1}{2}\right); \quad c_2^t(\xi) = -\Delta\beta_t(\xi),$$
(19)

где индекс “t” обозначает соответствующие значения на магической длине волны  $\omega_m^t$ . Поправки на эффекты гиперполяризуемости для низших колебательных уровней с ( $n < 3$ ) пренебрежимо малы на интенсивностях, необходимых для захвата

$$\Delta\nu_{cl}^t(n, \xi, I) = -9.507(2n+1)I^{1/2} + [8.25 + (0.005 - 0.01\xi^2)(n^2 + n + 1/2)]I + (5.80\xi^2 - 2.88)10^{-3}(2n+1)I^{3/2} + (2.5 - 5.03\xi^2)10^{-3}I^2,$$
(20)

где интенсивность лазерной решетки  $I$  представлена в единицах кВ/см<sup>2</sup>. Для  $I > 2$  кВ/см<sup>2</sup> положительное значение для линейной по  $I$  поправки полностью компенсируется отрицательным корневым членом и обуславливает главную поправку к сдвигу (20). С точностью в 3 десятичных знака  $n$ - и  $\xi$ -зависимости линейного по полю коэффициента пренебрежимо малы, как это следует из рис. 3, изображающего сдвиг (20) для наименьшего значения энергии колебательного состояния ( $n=0$ ).

#### **Эквивалентность сдвигов часовых уровней в стоячей волне**

В стоячей волне оптической решетки атомы охлаждаются вплоть до температур

$T < \Omega / 2 \approx \mathcal{E}^{rec} / k_B \approx 1 \mu\text{K}$ , что делает возможным захват атомов в

атомов в ловушку. Для примера, используя численные данные из табл. 1 для атомов Hg, сдвиг частоты, индуцированный оптической решеткой (17), может быть представлен (в миллигерцах) в следующем виде:

ловушку с наименьшей энергией колебательного состояния с главным колебательным квантовым числом  $n=0$ . Исключить корневой член возможно при выполнении условий равенства  $\alpha_g^{dqm}(\omega_m^s) = \alpha_e^{dqm}(\omega_m^s) \equiv \alpha_s^{dqm}$ .

При этих условиях  $c_{1/2}^s = 0$  и

$$\Delta\nu_{cl}^s(\xi, n, I) = c_1^s(\xi, n)I + c_{3/2}^s(\xi, n)I^{3/2} + c_2^s(n)I^2,$$
(21)

где

$$c_1^s(\xi, n) = -\Delta\alpha_s^{qm} - \frac{3\mathcal{E}_s^{rec}}{2\alpha_s^{dqm}} \Delta\beta_s(\xi) \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right),$$

$$c_{3/2}^s(\xi, n) = 2\Delta\beta_s(\xi) \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s^{rec}}{\alpha_s^{dqm}}} \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$c_2^s(\xi) = -\Delta\beta_s(\xi).$$
(22)

Индекс “s” обозначает соответствие магической длине волны

$$c_1^s(\xi, n) = -\Delta\alpha_s^{qm} - \frac{3\mathcal{E}_s^{rec}}{2\alpha_s^{dqm}} \Delta\beta_s(\xi) \left( n^2 + n + \frac{1}{2} \right),$$

$$c_{3/2}^s(\xi, n) = 2\Delta\beta_s(\xi) \sqrt{\frac{\mathcal{E}_s^{rec}}{\alpha_s^{dqm}}} \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

$$c_2^s(\xi) = -\Delta\beta_s(\xi).$$

С точностью до трех значащих цифр сдвиг (21) для атомов Hg может быть записан без корневой зависимости и отрицательным знаком для линейного члена. Соответствующий график представлен на рис. 4. Как и в случае бегущей волны, главная поправка к сдвигу определяется линейным по  $I$  членом, определяемым главным образом разностью мультипольных поляризуемостей  $\Delta\alpha_s^{qm}$ .

**Эквивалентность дипольных поляризуемостей для часовых уровней**

В случае

$$c_{1/2}^{E1}(n) = -\Delta\alpha_m^{qm} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{E1}^{rec}}{\alpha_m^{E1}}} \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad c_1^{E1}(\xi, n) = -\frac{3\mathcal{E}_{E1}^{rec}}{2\alpha_m^{E1}} \Delta\beta_{E1}(\xi) \left( n^2 + n + \frac{1}{2} \right),$$

$$c_{3/2}^{E1}(\xi, n) = 2\Delta\beta_{E1}(\xi) \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{E1}^{rec}}{\alpha_m^{E1}}} \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad c_2^{E1}(\xi) = -\Delta\beta_{E1}(\xi).$$

Таким образом, в случае равных дипольных поляризуемостей коэффициенты,  $c_1^{E1}(\xi, n)$ ,  $c_{3/2}^{E1}(\xi, n)$  и  $c_2^{E1}(\xi, n)$  пропорциональны разности гиперполяризуемостей  $\Delta\beta^{E1}(\xi)$ .

Очевидно, для всех трех описанных выше стратегий определения магических длин волн коэффициенты  $c_{3/2}$  и  $c_2$ , совпадающие до 6 значащих цифр, пропорциональны  $\Delta\beta(\xi)$ . Коэффициент при корневой зависимости  $c_{1/2}^s = 0$ , в то время как

$$\alpha_g^{E1}(\omega_m^{E1}) = \alpha_e^{E1}(\omega_m^{E1}) \equiv \alpha_m^{E1}$$

поправки первого порядка для глубины потенциала (8) эквивалентны. Следовательно, главная поправка к коэффициенту  $c_1$ , определяемая в (19) и (22) разностью мультипольных поляризуемостей  $\Delta\alpha_{s(t)}^{qm} \in$ , сокращается, остается лишь поправка на гиперполяризуемость, которая на два порядка меньше по порядку величины, как следует из данных табл. 1. Одновременно коэффициент  $c_{1/2}^{E1}$  равен лишь половине коэффициента  $c_{1/2}^t$  в уравнении (19). В этом случае совокупность коэффициентов в правой части уравнения (17) может быть представлена в следующем виде:

магические длины волн, определяемые уравнениями (1) и (3), соотносятся друг с другом при выполнении условия  $c_{1/2}^{E1} \approx 0.5c_{1/2}^t$  и пропорциональны разности мультипольных поляризуемостей  $\Delta\alpha_m^{qm}$ . Как следует из данных табл. 1, коэффициенты при линейном члене в (17) удовлетворяют условию  $|c_1^{E1}| \ll |c_1^s| \approx |c_1^t|$ . Поправки мультипольных взаимодействий при  $c_1^t(\xi, n)$  и  $c_1^s(\xi, n)$  противоположны по знаку, а поправки

на ангармонические взаимодействия к коэффициенту  $c_1^{(s)}(\xi, n)$ , пропорциональны  $\Delta\beta(\xi)$ , и эта разность существенно меньше по порядку величины в сравнении с  $\Delta\alpha^{qm}$ . Проведенные оценки показывают, что выбором магической частоты  $\omega_m^{E1}$  можно влиять на вклад нелинейных и мультипольных сдвигов в частоту

$$\Delta\nu_{cl}^{E1}(n, \xi, I) = -9.507(n+1/2)I^{1/2} + (4.98 - 10.02\xi^2)10^{-3}(n^2 + n + 1/2)I + (5.80\xi^2 - 2.88)10^{-3}(n+1/2)I^{3/2} + (2.50 - 5.03\xi^2)10^{-3}I^2, \quad (24)$$

в которой интенсивность выражена в единицах  $\text{kV}/\text{cm}^2$ . Для “магической” степени циркулярной поляризации  $\xi = \pm 0.705$  все гиперполяризуемости (зависящие от  $-\xi$ ) в правых частях уравнений (23) и (24) равны нулю, и остается ненулевым только корневой вклад по интенсивности лазерного поля решетки. В этом случае остается ненулевым лишь неисключенный сдвиг, индуцированный лазерной решеткой, который для ниж-

$$\Delta\nu_{cl}^{E1}(0, 0, I) = -4.75I^{1/2} + 2.49 \cdot 10^{-3}I - 2.88 \cdot 10^{-3}I^{3/2} + 2.5 \cdot 10^{-3}I^2,$$

где положительные линейные и квадратичные поправки полностью компенсируются отрицательными вкладами корневой поправки и поправкой при  $I^{3/2}$  для  $I=163 \text{ kV}/\text{cm}^2$ , как следует из рис. 5.

Зависимости индуцированных лазерной решеткой частотных сдвигов от интенсивности поля решетки представлены на рис. 3-5 для часовых переходов в атомах Hg для переходов в низших колебательных состояниях  $n=0$  для трех различных магических длин волн: для бегущей

часового перехода и, следовательно, обеспечить минимум неопределенности, обусловленной влиянием лазерной решетки. Зависимость частоты часового перехода (17) от интенсивности с коэффициентами (23) для атомов Hg можно представить численно в виде следующей формулы (в единицах мГц):

него колебательного уровня  $n=0$  равен

$$\Delta\nu_{cl}^{E1}(0, \xi_{mag}, I) = -4.75I^{1/2}.$$

Следовательно, при  $I = 25 \text{ kV}/\text{cm}^2$ , для повышения точности измерений частоты часового перехода до уровня 18-го знака, этот сдвиг должен быть контролируемым с точностью, как минимум превышающей уровень 4%. Для линейной поляризации  $\xi = 0$  сдвиг равен

волны (рис. 3), в стоячей волне (рис. 4) и для промежуточного случая эквивалентности дипольных поляризуемостей (рис. 5). Как следует из этих рисунков, для магических длин волн, определяемых для бегущей или стоячей волн (рис. 3 и 4), индуцированный лазерной решеткой, частотный сдвиг слабо зависит от поляризации лазерного поля решетки, поскольку вклад гиперполяризуемости пренебрежимо мал в сравнении с поправками от мультипольных поляризуемостей в диапа-

зоне интенсивностей  $I < 200$  кВ/см<sup>2</sup>. Напротив, в случае «эквивалентных дипольных поляризуемостей» для магической длины волны (рис. 5), в котором поправки от вклада мультипольных поляризуемостей к линейному по интенсивности члену полностью сокращаются, только эффекты гиперполяризуемостей в коэффициентах  $c_i$  ( $i = 1, 3/2, 2$ ) обуславливают зависимость сдвига от поляризации лазерной волны. Следовательно, этот случай наиболее интересен в спектроскопии часового перехода. Поправка на гиперполяризуемость существенно зависит от поляризации лазерной волны. Для линейной поляризации,  $\xi = 0$ , при интенсивности  $I \approx 160$  кВ/см<sup>2</sup> положительные поправки от линейного и квадратичного членов по интенсивности  $I$  в формуле (17) могут компенсироваться отрицательными вкладом корневых поправок и поправок  $I^{3/2}$ . Для циркулярной и эллиптической поляризации с  $\xi > \xi_{mag} \approx 0.7$  поправки на гиперполяризуемость в полном сдвиге частоты отрицательны и возрастают

при увеличении интенсивности  $I$  (см. рис. 5).

Таким образом, принципиальной особенностью атомов ртути в оптической решетке с магической длиной волны для «эквивалентных дипольных поляризуемостей» является возможность высокоэффективного контроля индуцированного лазерной решеткой частотного сдвига (24) посредством изменения интенсивности и поляризации. Соответствующим выбором  $I$  и  $\xi$  ( $\xi < \xi_{mag}$ ) можно полностью исключить этот сдвиг. Однако необходимо учитывать и мнимую часть  $\Delta\nu_{cl}^{E1}(n, \xi, I)$ , которая соответствует эффекту двухфотонной ионизации для верхнего часового состояния в поле лазерной волны оптической решетки. Так, в дополнение к сдвигу, обусловленному действительной частью гиперполяризуемости, имеет место эффект ионизационного уширения

$\Gamma(\xi, n, I) = \text{Im}[\Delta\nu(\xi, n, I)]$  часового перехода в атомах ртути для магической длины волны, определяемый мнимой частью гиперполяризуемости:

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi, n, I) &= \left\{ \text{Im}[c_1(\xi, n)]I + \text{Im}[c_{3/2}(\xi, n)]I^{3/2} + \text{Im}[c_2(\xi, n)]I^2 \right\} \\ &= \text{Im}[\Delta\beta(\xi)] \left\{ -\frac{3\varepsilon^{rec}}{2\alpha_m}(n^2 + n + 1/2)I + \sqrt{\frac{\varepsilon^{rec}}{\alpha_m}}(2n + 1)I^{3/2} - I^2 \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Как уже было отмечено выше, это значение обуславливает наличие дополнительной неопределенности, связанной с двухфотонной ионизацией, и эту величину необходимо учитывать в полном бюджете неоп-

ределенностей оптического стандарта частоты на лазерной решетке. На рис. 5, приведена зависимость функции (25) для  $n = 0$  и  $n = 0$ , которая представлена для реальных и мнимых составляющих для сдвига час-

тоты (17).

На рис. 6 и 7 представлены наиболее интересные случаи зависимостей частотных сдвигов  $\Delta\nu_{cl}^s(0, \xi, I)$  для атомов Sr и  $\Delta\nu_{cl}^{E1}(0, \xi, I)$  для атомов Yb. В соответствии с уравнениями (19)-(23) и данными табл. 2, представлены численные значения коэффициентов  $c_i (i = 1/2, 1, 3/2, 2)$ . Отрицательные значения поправок для степеней интенсивности 1/2 и 3/2 в частотном сдвиге (17) для атомов Sr в лазерной решетке для магической длины волны (в случае стоячей волны) компенсируются положительными квадратичными членами уже при интенсивности от  $I=5$  (для циркулярной поляризации) до  $I=8$  (для линейной поляризации), и зависимость  $\Delta\nu_{cl}^s(n=0, \xi, I)$  преобразуется в параболу с положительным коэффициентом

$$c_2^s(\xi) = 0.2 + 0.111\xi^2 \quad \text{мГц}/(\text{кВт}/\text{см}^2)^2$$

(рис. 6). Более замечательный результат может возникнуть для сдвига  $\Delta\nu_{cl}^{E1}(n=0, \xi = \xi_{mag}, I)$  атомов Yb (рис.7), где

$$c_1^{E1}(\xi_{mag}) = c_{3/2}^{E1}(\xi_{mag}) = c_2^{E1}(\xi_{mag}) = 0.$$

Вообще говоря, для рассматриваемых значений интенсивностей  $I$  сдвиг может быть уменьшен практически до нуля с использованием соответствующих степеней циркулярной поляризации  $\xi_0$ :

$$\Delta\nu_{cl}^{E1}(n=0, \xi_0, I) = 0.$$

В частности,

$$\xi_0^2(I = 5 \text{ кВт}/\text{см}^2) \approx 0.314,$$

$$\xi_0^2(I = 10 \text{ кВт}/\text{см}^2) \approx 0.504,$$

и

$$\lim_{I \rightarrow \infty} \xi_0^2 \rightarrow \xi_{mag}^2 = 0.6044.$$

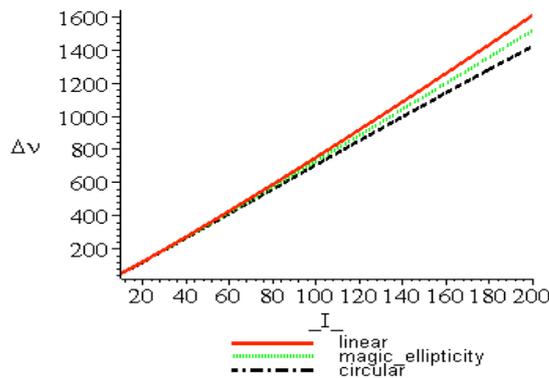


Рис. 3. Зависимость сдвига частоты часового перехода  $\Delta\nu$  (в мГц) в атомах Hg от интенсивности  $I$  (в кВт/см<sup>2</sup>) оптической решетки с магической длиной волны, определяемой для бегущей волны. Сдвиги частоты для линейной, “магической эллиптичности” и циркулярной поляризации весьма близки друг к другу, вплоть до  $I=200$  кВт/см<sup>2</sup>.

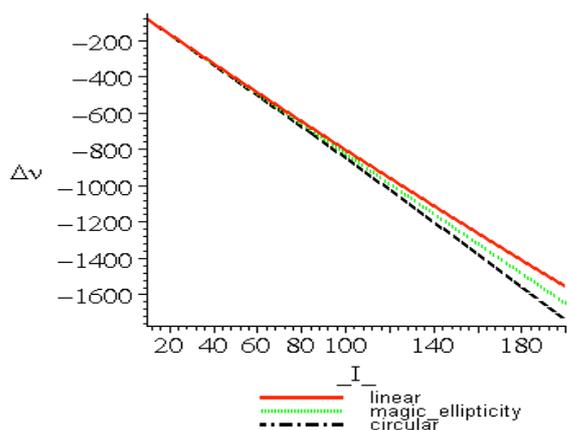


Рис. 4. Зависимость сдвига частоты часового перехода  $\Delta\nu$  (в мГц) в атомах Hg от интенсивности  $I$  (в  $\text{kV}/\text{cm}^2$ ) оптической решетки с магической длиной волны, определяемой для стоячей волны (линейная поляризация – сплошная линия, «магическая эллиптичность» – пунктирная линия, циркулярная поляризация – штрих-пунктирная линия).

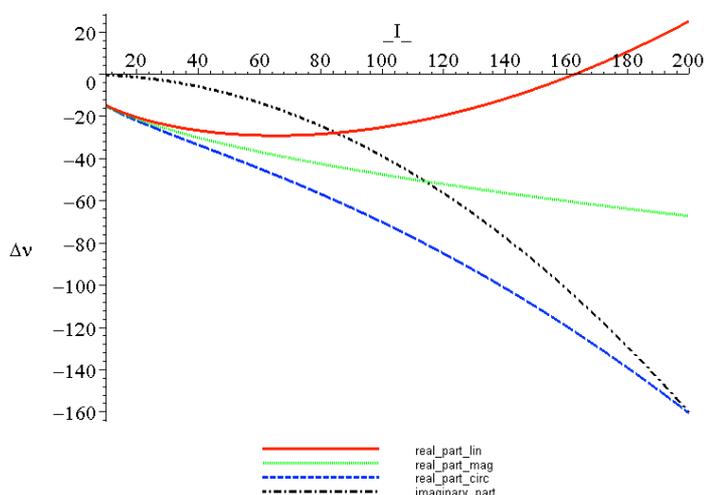


Рис. 5. Зависимость сдвига частоты часового перехода  $\Delta\nu_{cl}^{E1}(n, \xi, I)$  (в мГц) в атомах Hg, захваченных в основное состояние с колебательным квантовым числом  $n = 0$ , от интенсивности  $I$  (в единицах  $\text{kV}/\text{cm}^2$ ) для линейной поляризации ( $\xi = 0$ , сплошная кривая); «магической эллиптичности» ( $\xi = \xi_{mag}$ , штриховая кривая), и циркулярной поляризации ( $\xi = 1$  пунктирная кривая) лазерной волны для случая «эквивалентных дипольных поляризуемостей» для магической длины волны; тонкая штрих-пунктирная кривая отображает мнимую часть частотного сдвига (уширение линии часового перехода (25)) для линейной поляризации  $\xi = 0$  лазерного поля.

Коэффициенты для индуцированного лазерной решеткой частотного сдвига (17) для колебательных уровней с  $n=0$

АТОМ	Sr	Yb	Hg
$c_{1/2}^t = 2c_{1/2}^{E1}$ , мГц(кВ/см <sup>2</sup> ) <sup>-1/2</sup>	-0.382	1.79	-9.51
	$c_{1/2}^s = 0$		
$c_1^t = -c_1^s$ , мГц(кВ/см <sup>2</sup> ) <sup>-1/2</sup>	1.39	-8.06	8.25
$c_1^{E1}(\xi = 0)$ , мГц(кВ/см <sup>2</sup> ) <sup>-1/2</sup>	0.0115	0.0136	0.0025
$c_1^{E1}(\xi = \pm 1)$ , мГц(кВ/см <sup>2</sup> ) <sup>-1/2</sup>	0.0179	-0.0089	-0.0025
$c_{3/2}^{t(s,E1)}(\xi = 0)$ , мГц(кВ/см <sup>2</sup> ) <sup>-1/2</sup>	-0.0554	-0.0814	-0.0029
$c_{3/2}^{t(s,E1)}(\xi = \pm 1)$ , мГц(кВ/см <sup>2</sup> ) <sup>-3/2</sup>	-0.0862	0.0534	0.0029
$c_2^{t(s,E1)}(\xi = 0)$ , мГц(кВ/см <sup>2</sup> ) <sup>-2</sup>	0.200	0.366	0.0025
$c_2^{t(s,E1)}(\xi = \pm 1)$ , мГц(кВ/см <sup>2</sup> ) <sup>-2</sup>	0.311	-0.240	-0.00253

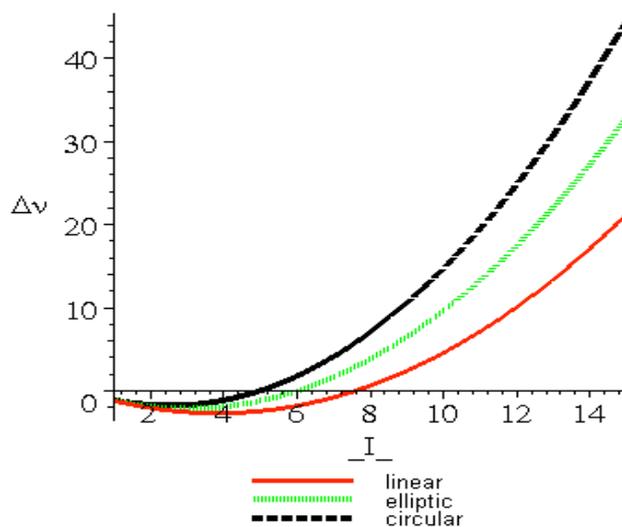


Рис. 6. Зависимость сдвига частоты часового перехода  $\Delta\nu$  (в единицах мГц) в атомах Sr от интенсивности  $I$  (в кВ/см<sup>2</sup>) для линейной поляризации (сплошная кривая), эллиптической поляризации (пунктирная кривая) и циркулярной поляризации (штриховая кривая) для магической длины волны оптической решетки (случай стоячей волны лазерного поля).

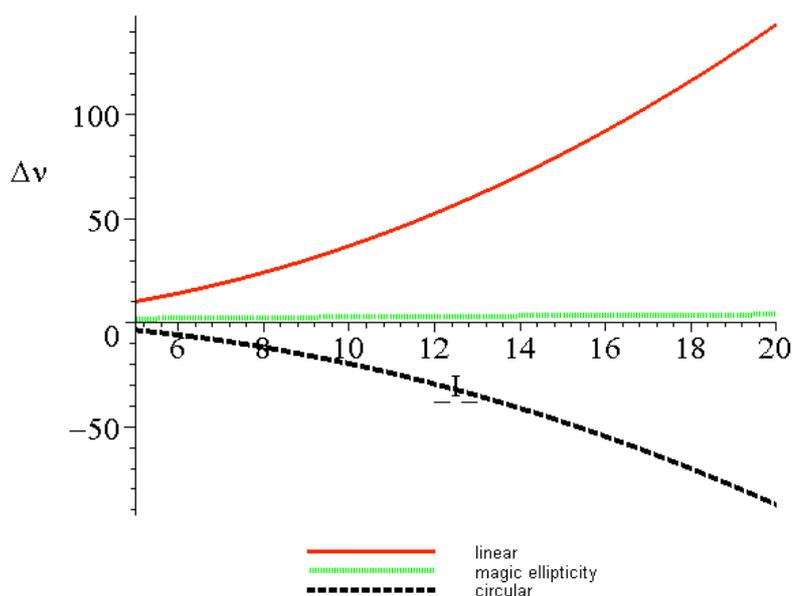


Рис. 7. Зависимость сдвига частоты часового перехода  $\Delta\nu$  (в единицах мГц) для атомов  $^{87}\text{Yb}$  от интенсивности  $I$  (в  $\text{kV}/\text{cm}^2$ ) для линейной, эллиптической и циркулярной поляризации поля решетки; магическая длина волны определялась для “эквивалентных дипольных поляризуемостей”.

### III. Магическая длина волны для «голубой» отстройки

Для магической длины волны с отталкивающим потенциалом оптической решетки соответствующие значения дипольной поляризуемости отрицательны  $\alpha^{E1}(\omega) < 0$ , а штарковская энергия – положительна, поэтому положение равновесия атома

находится вблизи узлов стоячей волны решетки с вектором электрического поля

$$\mathbf{E}(X, t) = 2\mathbf{E}_0 \sin(kX) \sin(\omega t), \quad (26)$$

где  $X$  пространственная компонента атома относительно положения равновесия. Пространственная часть оператора взаимодействия атома с полем волны решетки (26) может быть записана как

$$V(X) = V_{E1} \sin(kX) + (V_{E2} + V_{M1}) \cos(kX) \quad (27)$$

с  $E1$ -,  $E2$ - и  $M1$ -взаимодействиями в уравнениях (6). Захватывающий потенциал оптической решетки с магической длиной волны, учитывающий зависимость от эффектов гиперполяризуемости и ангармонизма, может быть записан по аналогии со случаем магической длиной волны с «красной отстройкой» в форме уравнения (7). Основу преимущества отталкивающего захватывающего потенциала составляет тот факт, что область локализации атомов располагается вблизи узлов стоячей волны решетки, причем в ее узлах поле решетки обращается в ноль. Следовательно, эффекты гиперполя-

ризуемости не могут возникать в областях минимума потенциальной энергии или в собственных частотах колебательных уровней:

$$U_{g(e)}^{(0)}(I) \equiv U_{g(e)}^{latt}(X=0, I) = -\alpha_{g(e)}^{qm}(\omega)I, \quad \Omega_{g(e)} = 2\sqrt{-\varepsilon^{rec}\alpha_{g(e)}^{dqm}(\omega)I}. \quad (28)$$

Энергии колебательных уровней атома в основном (возбужденном) уровнях часового перехода в окрестностях узлов решетки стоячей волны с магической длиной волны с «голубой» отстройкой определяются уравнением:

$$E_{g(e)}^{vib}(I, n) = U_{g(e)}^{(0)} + \Omega_{g(e)} \left( n + \frac{1}{2} \right) - E_{g(e)}^{anh}(I) \left( n^2 + n + \frac{1}{2} \right), \quad (29)$$

в котором эффекты гиперполяризуемости могут учитываться только в ангармонической поправке

$$E_{g(e)}^{anh}(I) = \frac{1}{2} \varepsilon^{rec} \left[ 1 - \frac{3\beta_{g(e)}(\omega)I}{\alpha_{g(e)}^{dqm}(\omega)} \right], \quad (30)$$

содержащей в дополнение к энергии (28), линейную по интенсивности лазерного поля  $I$  поправку, в виде:

$$\Delta \nu_{cl}^{latt}(\omega_m, I, n) = E_e^{vib} - E_g^{vib} = c_{1/2}(n)I^{1/2} + c_1(n)I, \quad (31)$$

где

$$c_{1/2}(n) = \sqrt{\varepsilon^{rec}} \left( \sqrt{-\alpha_e^{dqm}(\omega_m)} - \sqrt{-\alpha_g^{dqm}(\omega_m)} \right) (2n+1);$$

$$c_1(n) = -\Delta\alpha^{qm}(\omega_m) + \frac{3\varepsilon^{rec}}{2} \left[ \frac{\beta_e(\omega_m)}{\alpha_e^{dqm}(\omega_m)} - \frac{\beta_g(\omega_m)}{\alpha_g^{dqm}(\omega_m)} \right] \left( n^2 + n + \frac{1}{2} \right); \quad (32)$$

Главная поправка к индуцированному полю решетки сдвигу частоты оптического перехода описывается вторым членом в правой части уравнения (29). Следовательно, выбор магической длины волны заключается в обеспечении условия эквивалентности собственных частот колебательного движения (28) атомов в основном и в возбужденном состояниях,  $\Omega_g = \Omega_e$ , содержащих корневую зависимость от интенсивности лазерного поля. Это означает, что при таком выборе магической длины волны коэффициент  $c_{1/2}(n)$  может обратиться в ноль, и в результате остается лишь линейная зависимость

в частотном сдвиге (31). Линейный частотный сдвиг соответствует численному значению 136 мГц при  $I=10$  кВ/см<sup>2</sup> (табл. 1) и, следовательно, возникает необходимость его точного контроля в высокоточных измерениях частоты часового перехода.

#### IV. Использование метода модельного потенциала для расчета электромагнитных восприимчивостей щелочно-земельных атомов

Расчеты магических длин волн в одноэлектронном приближении модельного потенциала [7] с использованием соответствующих эмпирических параметров, определяемых из

известных значений энергий атомных уровней [12], позволяют получить численные данные для Sr, Yb и Hg атомов, близкие к известным из литературы экспериментальным значениям (см. результаты для  $\lambda_{mag}$  в табл. 1). Результаты таких расчетов представлены на рис. 8-10.

Вообще говоря, приложение методов расчетов спектроскопических характеристик многоэлектронного атома с использованием одноэлектронного приближения, требует некоторой модификации метода модельного потенциала, точнее, выбора его параметров. Такая модификация метода модельного потенциала Фьюса была впервые продемонстрирована в работе [13]; впоследствии этот подход был успешно использован в расчетах поляризуемостей, гиперполяризуемостей, взаимодействий атомов с внешними полями, динамических взаимодействий, приложений в атомной спектроскопии и т.д (см., например, [7, 14-16]). Основная идея такой модификации заключается в следующем. Прежде всего, мы вводим нецелые значения для орбитального момента

триплетных S-состояний  $\tilde{l}_{z_S}$ , которые, тем не менее, должны быть близки к реальным моментам S-состояний,  $\tilde{l}_{z_S} \approx l_S = 0$ , и эффективные моменты для синглетных и триплетных D-состояний, которые должны удовлетворять равенству  $\tilde{l}_{z_D} \approx \tilde{l}_{z_D} \approx l_D = 2$ . Такой выбор ведет к переопределению целочисленного значения для радиального квантового числа  $n_r$  для обеспечения исходного равенства  $\tilde{l}_{z_S} + n_r + 1 = v_{nl}$  для эффективного главного квантового числа  $v_{nl}$  определяемого из энергии  $E_{nl} = -Z^2 / (2v_{nl}^2)$  атомного состояния  $|nl\rangle$ .

Данная модификация метода модельного потенциала Фьюса использовалась в настоящей работе в расчетах всей совокупности рассчитываемых характеристик для атомов Sr, Yb и Hg. Результаты расчетов магических длин волн представлены на рис. 8-10.

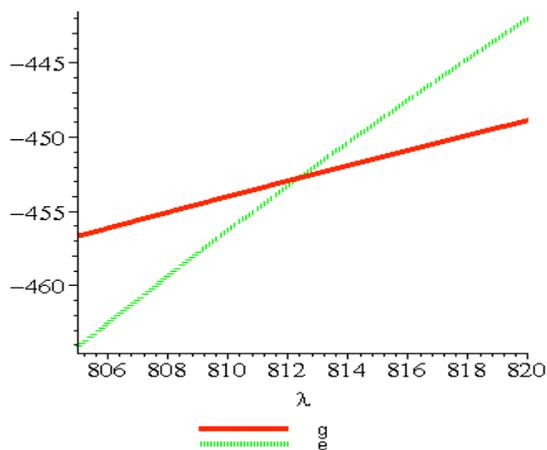


Рис. 8. Зависимость глубины потенциала решетки (в единицах кГц) от длины волны (в единицах нанометров) при интенсивности лазерного поля  $I=10\text{кВ/см}^2$  для атомов Sr в их возбужденном  $5s5p^3P_0$  (e) и основном  $5s^2\ ^1S_0$  (g) состоянии часовой перехода.

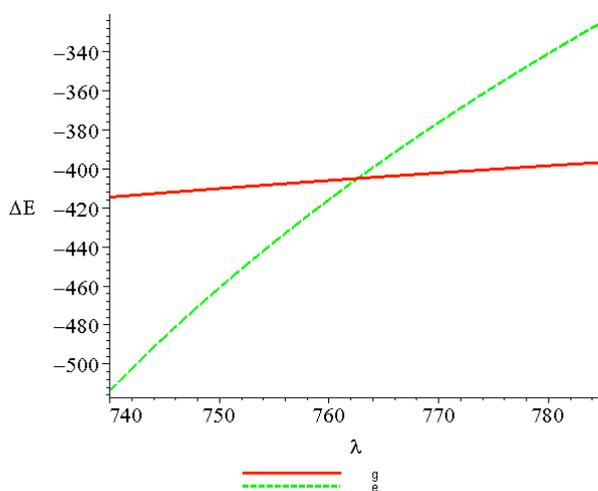


Рис. 9. Зависимость глубины потенциала решетки (в единицах кГц) от длины волны (в единицах нанометров) при интенсивности лазерного поля  $I=10\text{кВ/см}^2$  для атомов Yb в их возбужденном  $6s6p^3P_0$  (e) и основном  $6s^2\ ^1S_0$  (g) состоянии часовой перехода. Результаты расчетов в приближении модельного потенциала  $\lambda_{\text{mag}} \approx 762.6\text{ нм}$  находятся в хорошем соответствии с данными экспериментальных измерений  $\lambda_{\text{mag}}^{\text{exp}} \approx 759.3537\text{ нм}$  [4].

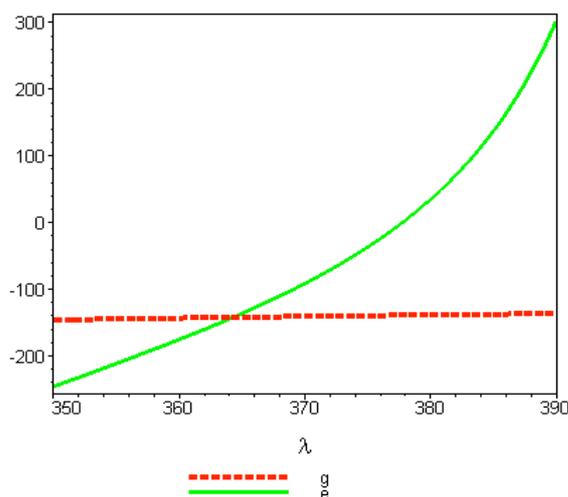


Рис. 10. Зависимость глубины потенциала решетки (в единицах килогерц) от длины волны (в единицах нанометров) при интенсивности лазерного поля  $I=25\text{кВ/см}^2$  для атомов Hg в их возбужденном  $6s6p^3P_0$  (e) и основном  $6s^2\ ^1S_0$  (g) состоянии часового перехода. Результаты расчетов в приближении модельного потенциала  $\lambda_m \approx 364$  нм находятся в хорошем соответствии с данными экспериментальных измерений  $\lambda_m \approx 362.53$  нм [5].

### Заключение

В настоящей статье выполнены прецизионные расчеты эффектов высшего порядка для взаимодействия щелочно-земельных атомов с полем оптической решетки применительно к конструкциям современных оптических стандартов частоты на оптических решетках. Рассмотрены, в частности, мультипольные разложения оператора взаимодействия атомов с полем решетки для электрического дипольного (E1) и мультипольного взаимодействий (M1 и E2). Определены аналитически и численно алгоритмы расчета магических длин волн для «красной» и «голубой» отстроек лазерного поля решетки с притягивающим и отталкивающим потенциалами решетки для одномерной модели лазерной

решетки. Сформулированы требования, предъявляемые к точности определения магических длин волн для различных стратегий измерений частоты часового перехода для атомов Sr, Yb и Hg в оптической решетке. Подчеркивается, что для отдельных случаев измерений вклады нелинейно-оптических эффектов высшего порядка не компенсируются выбором МДВ и, следовательно, должны быть корректно учтены при анализе результатов измерений частоты часового перехода в оптических стандартах частоты.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект No. 1226) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект No. 14-02-00516-а).

**Литература**

1. Chou C.W., Hume D.B., Koelemeij J.C.J., Wineland D.J. and Rosenband T. Frequency ratio of Al<sup>+</sup> and Hg<sup>+</sup> single-ion optical clocks; metrology at the 17th decimal place// *Phys. Rev. Lett.*, vol.104, 070802 (2010).
2. Bloom B.J., Nicholson T.L., Williams J.R., Campbell S.L., Bishof M., Zhang X., Zhang W., Bromley S.L., Ye J. An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10<sup>-18</sup> level, *Nature* vol. 506, 71 (2014).
3. Westergaard P.G., Lodewyck J., Lorini L., Lecallier A., Burt E.A., Zawada M., Millo J. and Lemonde P. Lattice-Induced Frequency Shifts in Sr Optical Lattice Clocks at the 10–17 Level//, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, 210801 (2011).
4. Barber Z.W., Stalnaker J.E., Lemke N.D. et al. Optical lattice induced light shifts in an Yb atomic clock// *Phys.Rev.Lett.*, vol. 100, 103002 (2008).
5. Yi L., Meiri S., McFerran J.J., Le Coq Y. and Bize S.// *Phys.Rev.Lett.*, 106, 073005 (2011).
6. Ovsiannikov V.D., Pal'chikov V.G., Taichenachev A.V., Yudin V.I. and Katori H. Multipole, nonlinear, and anharmonic uncertainties of clocks of Sr atoms in an optical lattice// *Phys. Rev. A*, vol. 88, 013405 (2013).
7. Manakov N.L., Ovsiannikov V.D. and Rapoport L.P. Atoms in a laser field// *Phys. Rep.*, vol. 141, p.319 (1986).
8. Katori H., Takamoto M., Pal'chikov V.G. and Ovsiannikov V.D. Ultrastable optical clock with neutral atoms in an engineered light shift trap// *Phys.Rev.Lett.*, vol. 91, 173005 (2003).
9. Taichenachev A.V., Yudin V.I., Ovsiannikov V.D., Pal'chikov V.G. and Oates C.W. Frequency shifts in an optical lattice clocks due to magnetic-dipole and electric-quadrupole transitions// *Phys.Rev. Lett.*, vol. 101, 193601 (2008).
10. Taichenachev A.V., Yudin V.I., Ovsiannikov V.D. and Pal'chikov V.G. Optical lattice polarization effects on hyperpolarizability of atomic clock transitions// *Phys.Rev.Lett.*, vol. 97, 173601 (2006).
11. Takamoto M., Katori H., Marmo S.I., Ovsiannikov V.D. and Pal'chikov V.G. Prospects for optical clocks with a blue-detuned lattice// *Phys.Rev.Lett.*, vol. 102, 063002 (2009).
12. NIST Atomic Spectra Database (version 4.1) / Ralchenko Yu. [et al] // NIST ASD Team National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD. [Online]. Available at: <http://physics.nist.gov/asd>
13. Simons G. New model potential for pseudopotential calculations// *J. Chem. Phys.*, vol. 55, p.756 (1971).
14. Kostelecky V.A. and Nieto M.M. Analytical wave functions for atomic quantum-defect theory// *Phys. Rev. A*, vol.32, p.3243 (1985).
15. Djerad M.T. Atomic parameters for transitions involving Rydberg states of singly ionized alkaline earths// *J. Physique II*, 1991, vol.1, p.1 (1991).
16. Celik G., Ates S., Ozarslan S. and Taser M. Transition probabilities, oscillator strengths and lifetimes for singly ionized magnesium// *J. Quant. Spectrosc. & Radiat. Transfer*, vol. 112, p. 2330 (2011).