УДК 528:629.78

О ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ГЕОПОТЕНЦИАЛА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПРОЕКТА GOCE

Ю.М. Нейман, Л.С. Сугаипова

ОАО «НПК «СПП», г. Москва, e-mail: yurney@mail.ru

ОАО «НПК «СПП», г. Москва, e-mail: leyla_sugaipova@mail.ru

Гармонический анализ на сфере по результатам спутниковой градиентометрии предлагается производить на основе одной из теорем о выборке - теоремы Дрисколла-Хили. В отличие от традиционного подхода, формулы Дрисколла-Хили используют идеи квадратур наивысшей алгебраической точности и позволяют тем самым значительно уменьшить количество необходимых операций.

Ключевые слова: анализ геопотенциала, квадратуры наивысшей алгебраической точности

Как известно, измерения вторых производных геопотенциала в рамках проекта GOCE выполнялись в течение более 4-х лет, с дискретностью 1 с. Полученный богатейший материал может быть использован для решения самых разнообразных задач. Что касается гармонического анализа глобального гравитационного поля Земли (ГПЗ), то лучше всего этот материал приспособлен для определения среднечастотной части поля. Обоснованием этого утверждения могут служить следующие простейшие рассуждения.

Точность градиентометра характеризуется величиной порядка двух-трёх мЕ (один миллиэтвеш = $10^{-3}E$, $1E$ = один этвеш $=10^{-9}s^{-2}=1\mu$ Гал/10 м), но погрешности имеют характер цветного шума. Спектральная плотность $S(\nu)$ шумов, по данным Европейского космического агентства, не превышает $\sqrt{S(v)} \leq 4mE/\sqrt{\text{Гц}}$ в "измерительной полосе" частот $0{,}005\text{ Гц} \leq v \leq 0{,}1\text{ Гц}$ в инструментальной системе координат, но практически используемый диапазон ограничивается частотами $0{,}005\text{ Гц} \leq v \leq 0{,}05\text{ Гц}$.

Так как период обращения спутника ≈ 5400 с, то за одну секунду спутник пролетает примерно $360^o/5400=(1/15)^o=4'\approx 110$ км/15 = 7.3 км. Это соответствует частоте в 1 Hz. Поэтому граничная частота Найквиста 0,1 Hz соответствует приближенно 73 км, что, в свою очередь, приближенно соответствует степени разложения геопотенциала $\approx 110\text{ км}\cdot 180/73\text{ км} \approx 270$. Практически разрешающая способность не меньше 100 км и наивысшая степень CS-коэффициентов, которые можно определить достаточно надёжно, не превышает 240 ~ 260.

Наивысшая чувствительность спутниковой градиентометрии типа GOCE приходится на диапазон степеней разложения приближённо от $n_1=70$ до

$n_2 = 240$, что примерно соответствует указанной выше практически используемой полосе $0{,}005\ \text{Гц} \leq \nu \leq 0{,}05\ \text{Гц}$ в спектре шумов. Для определения длинноволновой части ГПЗ проект GOCE приспособлен сравнительно плохо, чего и следовало ожидать, исходя из смысла понятия производных. Например, в терминах гармонических CS-коэффициентов результаты другого известного проекта (GRACE) считаются более точными до степени $n \approx 100$, но при $n > 140$ сравнение однозначно в пользу GOCE. В полосе $100 < n < 140$ оба проекта можно приближённо считать сопоставимыми. Поэтому нижнюю границу полосы частот при гармоническом анализе ГПЗ по результатам спутниковой градиентометрии нет необходимости выбирать ниже $\approx 60-80$, а верхнюю - выше $\approx 240-260$.

Практически рекомендуется фильтровать исходную информацию и выполнять вычисления до более высокой степени разложения (скажем, до $n_2 \approx 720$), но конечный результат ограничить по-прежнему наивысшей степенью n_2 = 240. Это уменьшает искажения коэффициентов за счёт наложения высокочастотных составляющих исходных данных. Длинноволновая часть до степени $n_1 \approx 80$ убирается из исходных данных с помощью одной из надёжных спутниковых моделей ГПЗ.

Что касается техники вычислений, то необходимые алгоритмы можно строить на принципе наименьших квадратов или пользоваться средствами численного интегрирования наивысшей алгебраической точности. Оба эти подхода имеют свои достоинства и недостатки. Сопоставление их потребовало бы привлечения многих деталей, и поэтому мы не будем здесь на этом останавливаться.

Рассмотрим возможности численного интегрирования, основанного на теореме о выборке на сфере. Если в качестве широтных узлов интегрирования выбрать корни полиномов Лежандра, то соответствующая квадратура приводит, как известно, к формулам наивысшей алгебраической точности Гаусса-Лежандра. Некоторый опыт такого подхода описан в работе [1]. В данной работе теоретической основой служит следующая теорема о выборке, полученная в [2].

Пусть на единичной сфере $f(\theta, \lambda)$ обозначает такую функцию ограниченных частот, которая не содержит сферических функций степени $\geq N$. Тогда для точного вычисления её гармонических коэффициентов f_{nm}, которые определяются интегралом

$$f_{nm} = \int_{\omega} f(\theta,\lambda)\bar{Y}_n^{m*}(\theta,\lambda)d\omega,\ 0 \leq n < N,\ -n \leq m \leq n, \qquad (1)$$

достаточно иметь выборку в узлах равноугольной сетки $2N \times 2N$ сферы из промежутков $\theta \in [0;\pi]$, $\lambda \in [0;2\pi)$. При этом

$$f_{nm} = \sum_{j=0}^{2N-1} w_j \sum_{k=0}^{2N-1} f(\theta_j, \lambda_k) \bar{Y}_n^{m*}(\theta_j, \lambda_k), \qquad (2)$$

где $\theta_j = \dfrac{\pi j}{2N}$, $\lambda_k = \dfrac{\pi k}{N}$; $j, k = 0, 1, 2, \ldots, 2N-1$; $\bar{Y}_n^m$ - нормированная (до единицы) комплексная сферическая функция степени n и порядка m, значок $*$ обозначает комплексное сопряжение.

Квадратурные веса w_j играют роль компенсатора плотности узлов сетки при приближении к полюсам и представляют собой решения уравнений:

$$\sum_{j=0}^{2N-1} w(\theta_j) P_n(cos\theta_j) = \frac{2\pi}{N} \delta_{n0}, \quad \forall n < 2N, \qquad (3)$$

так что

$$\sum_{j=0}^{2b-1} w(\theta_j) = \frac{2\pi}{N}. \qquad (4)$$

В явном виде

$$w_j = \frac{2\pi}{N^2} \sin\theta_j \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\sin((2l+1)\theta_j)}{2l+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, 2N-1. \qquad (5)$$

Общее количество узлов сетки равно $(2N-1)\cdot 2N + 1 \approx 4N^2$. Прямоугольные координаты узлов легко вычислить по формуле:

$$R(\sin\theta_j \cos\lambda_k, \sin\theta_j \sin\lambda_k, \cos\theta)^T, \qquad (6)$$

где R- радиус сферы.

Коэффициенты (2) таковы, что (без учёта ошибок округления)

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^{n} f_{nm} \bar{Y}_n^{m*}(\theta, \lambda) = f(\theta, \lambda), \qquad (7)$$

то есть непрерывная частотно ограниченная $n < N$ функция однозначно и без потерь восстанавливается по её $\approx 4N^2$ дискретным значениям.

Ранее отмечалось, что, поскольку сферические функции Y_{nm} представляют собой произведение тригонометрических функций, зависящих только от долготы λ, и функций Лежандра, зависящих только от полярного угла θ, определение гармонических коэффициентов удобно разбить на два независимых этапа. Алгоритм Дрисколла-Хили использует быстрое преобразование Фурье, чтобы определить вклад сигнала в долготном направлении и рекуррентные соотношения присоединённых функций Лежандра для учёта изменений сигнала с широтой. Чтобы увидеть это, перепишем (2) в виде

$$f_{nm} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \cdot \sum_{j=0}^{2N-1} \left(\sum_{k=0}^{2N-1} w_j f(\theta_j, \lambda_k) e^{-im\lambda_k} \right) P_{nm}(\cos\theta_j). \qquad (8)$$

Для каждого фиксированного значения полярного угла θ_j рекомендуется внутреннюю сумму в (8) вычислить с помощью быстрого преобразования Фурье относительно долготы длиной $2N$. В результате внутренняя сумма оказывается дискретной функцией только θ_j и m, а выражение (8) принимает вид:

$$f_{nm} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \cdot \sum_{j=0}^{2N-1} w(\theta_j) f(\theta_j, m) P_{nm}(\cos\theta_j). \tag{9}$$

Далее каждый коэффициент f_{nm} для $0 \le |m| \le n < N$ вычисляется в виде дискретного преобразования Лежандра (ДПЛ) по θ:

$$f_{nm} = \sum_{j=0}^{2N-1} \overline{f}(\theta_j, m) P_{nm}(\cos\theta_j) = (\overline{f}_m, P_{nm}), \quad n = |m|, |m+1|, \ldots, N-1. \tag{10}$$

Здесь $\overline{f}_m$ обозначает строку, элементами которой служат

$$\overline{f}_m(\theta_j) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \cdot w(\theta_j) f(\theta_j, m), \tag{11}$$

а P_{nm}- столбец присоединённых функций Лежандра $P_{nm}(\theta_j)$. Вычисляя эти функции, полезно учитывать, что при $m = n$ имеет место простое соотношение

$$P_{nn}(cos\ \theta) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(sin\ \theta)^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Для более низких значений порядка m можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$(n-m)P_{nm}(\nu) = (2n-1)\nu P_{n-1,m}(\nu) - (n+m-1)P_{n-2,m}(\nu), \tag{13}$$

где $\nu = cos\theta$, $0 \le m \le n-2$, $n \ge 2$.

Согласно [3], традиционный гармонический анализ при N^2 исходных данных требует количества операций порядка $O(N^4)$. Формулы Дрисколла-Хили используют идеи квадратур наивысшей алгебраической точности и позволяют уменьшить это до $O(N^2 \log^2 N)$.

Пусть сеточные значения $f(\theta_j, \lambda_m)$ исходной функции составляют матрицу D размером $2N \times 2N$, в которой полярный угол изменяется по строкам, а долгота - по столбцам. Все вышеописанные действия, как при вычислении преобразований Фурье, так и при вычислении преобразований Лежандра, требуют многократного выполнения и совершенно однотипны. Поэтому их целесообразно выполнять параллельно [4]:

• Сначала распределить строки по различным ядрам процессора и выполнить дискретное преобразование Фурье по долготе для каждого фиксированного значения полярного угла θ_j. Получаемые новые значения $f(\theta_j, m)$ записываем на прежние места.

• Далее надо распределить по различным ядрам процессора столбцы обновлённой матрицы D и выполнить дискретное преобразование Лежандра по θ для каждого фиксированного значения m.

В заключение заметим, что, зная $2N^2$ значений какой-либо функции в узлах стандартной сетки Коломбо [5]

$$\theta_j = \pi j / N,\ j = 0\ldots, N-1, \lambda_k = \pi k / N,\ j = 0\ldots, 2N-1, \quad (14)$$

можно выполнить гармонический анализ по сферическим функциям не более чем до степени N-1, то есть определить N^2 гармонических CS-коэффициентов. Поэтому обратный синтез с N^2 коэффициентами не может точно восстановить исходные $2N^2$ значений. Метод Дрисколла-Хили использует $4N^2$ исходных значений, но позволяет их точно восстановить по N^2 коэффициентам.

Итак, *обработка включает следующие основные этапы:*

• фильтрация исходных значений вторых производных геопотенциала с целью удаления высокочастотной части;

• удаление из исходных значений вторых производных геопотенциала низкочастотной части;

• преобразование полученных значений вторых производных возмущающего потенциала в узлы равноугольной сетки на сфере с помощью сферических радиальных базисных функций (СРБФ);

• быстрое преобразование Фурье в долготном направлении;

• быстрое преобразование Лежандра в широтном направлении;

• распараллеливание вычислений;

• контроль вычислений.

Найденные коэффициенты (2), (9) позволяют точно (без учёта вычислительных ошибок округления) восстановить исходную функцию ограниченных частот

$$f(\theta\ ,\lambda\ ) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=-n}^{n} f_{nm}\overline{Y}_{nm}(\theta_j, \lambda_k), \quad (15)$$

что служит надёжным контролем качества фильтрации и последующих вычислений.

Литература

1. Сугаипова Л.С. О гармоническом анализе по результатам спутниковой градиентометрии // Геодезия и аэрофотосъемка, 2014, № 2, с. 19-24.

2. Driscoll J.R., Healy R.M. Computing Fourier transforms and convolutions on the 2-sphere // Adv. Appl. Math., 1994, 15, p. 202–250.

3.Blais J.A.R. and Provins D.A. Spherical Harmonic Analysis and Synthesis for Global Multiresolution Applications // Journal of Geodesy, 2002, 76(1), p. 29–35.

4.Huang W., .Khalid Z. and Kennedy R.A. Efficient Computation of Spherical Harmonic Transform using Parallel Architecture of CUDA. Signal Processing and Communication Systems (ICSPCS). 2011, 5th International Conference 12-14 Dec., 2011.

5. Colombo O.L. Numerical methods for harmonic analysis on the sphere. Department of Geodetic Science and Surveying, 1981. Rep. No. 310. The Ohio State University, Columbus, Ohio.