

УДК 621.317

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ
АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕТЕКТОРНЫХ
ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ**

М.В. Васильева

*ФГУП «ВНИИФТРИ», Менделеево, Московская обл., Россия,
mvasilyeva@vniiftri.ru*

Аннотация. Рассмотрен способ построения функции преобразования измерительного преобразователя на базе полупроводникового диода путём аппроксимации его амплитудной характеристики. Предложены и опробованы различные способы аппроксимации, удовлетворяющие требованиям оптимальности с точки зрения точности и количества параметров аппроксимирующей функции, проведён их сравнительный анализ. Осуществлён вывод функции преобразования (ФП) на основе дробно-рациональных функций. Проведена оценка числа экспериментальных точек амплитудной характеристики, необходимого для достижения заданной погрешности.

Ключевые слова: измерительный преобразователь, амплитудная характеристика, аппроксимация.

**COMPARATIVE ANALYSIS OF METHODS
FOR APPROXIMATION OF AMPLITUDE
CHARACTERISTICS OF DETECTOR
MEASURING TRANSMITTERS**

M.V. Vasilieva

*FSUE «VNIIFTRI», Mendeleevo, Moscow region, Russia,
mvasilyeva@vniiftri.ru*

Annotation. A method for constructing a conversion function for a measuring transmitter based on a semiconductor diode by approximating its amplitude characteristic is considered. Various methods of approximation are proposed and tested, which satisfy the requirements of optimality in terms of accuracy and the number of parameters of the approximating function, their comparative analysis is carried out. The derivation of the transformation function (FP) is carried out on the basis of fractional-rational functions. An estimation of the number of experimental points of the amplitude characteristic required to achieve a given uncertainty is made.

Key words: measuring transmitter, amplitude characteristic, approximation.

Широкое применение в рабочих и эталонных [1] средствах измерений (СИ) нашли первичные измерительные преобразователи (ИП, детекторные измерительные преобразователи), в которых в качестве преобразователя переменного напряжения в постоянное используется полупроводниковый диод. Примерами подобных средств измерений могут быть измерители переменного напряжения, измерители мощности сигнала, измерители напряжённости электрического и магнитного полей, измерители плотности потока энергии.

Блок-схему таких преобразователей можно условно представить в виде, изображённом на рис. 1:

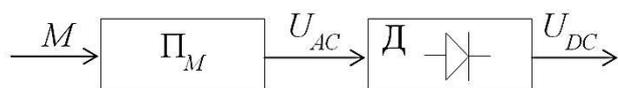


Рис. 1. Блок-схема преобразователя на базе полупроводникового диода:
 M — измеряемая величина; Π_M — преобразователь измеряемой величины M
 в переменное напряжение U_{AC} ; Д — преобразователь переменного напряжения U_{AC}
 в постоянное U_{DC} на базе полупроводникового диода (детектор)

Такие измерительные преобразователи с высокой точностью реализуют однозначную функциональную зависимость между входной измеряемой величиной (M) и напряжением на выходе ИП (U), которая называется *функцией преобразования ИП* ($M = f(U)$).

При построении измерителей такого типа в качестве функции преобразования (ФП) можно использовать теоретическую зависимость. Однако характеристика реального преобразователя может достаточно сильно отличаться от теоретического приближения, определённого для данного типа СИ. Другой широко применяемый способ построения ФП состоит в экспериментальном снятии характеристики по большому количеству точек в рабочем диапазоне преобразователя и дальнейшем применении интерполяционных методов для нахождения её значений в промежуточных точках. Однако данный способ требует значительных трудозатрат при градуировке по причине большого количества измерений и достаточно сложной математической обработки при вычислении измеряемой величины. Кроме того, для независимого описания преобразователя необходимо хранить значения всех точек градуировки, что явно избыточно.

Компенсировать недостатки применяемых способов построения ФП можно с помощью аппроксимации — замены таблично заданной ФП измерителя её некоторым приближением. Это позволит получить более простую зависимость при удовлетворяемой погрешности, меньшее число параметров, гладкую характеристику, обеспечивающую возможность дифференцирования (например, при расчёте погрешности), лёгкость обработки и хранения данных. При этом в процессе формирования функции преобразования ИП необходимо каждый раз выбирать компромиссное решение между требованием к точности измерений во всём диапазоне изменения амплитудной характеристики и требованием к допустимому уровню сложности вычислений.

Цель настоящей работы — построение аппроксимационного приближения амплитудной функции преобразования первичного измерительного преобразователя с полупроводниковым диодом, выбор наиболее оптимального варианта аппроксимационной формулы, использующей наименьшее число экспериментальных точек и имеющей минимальное количество параметров при заданной погрешности.

Теоретические основы функций преобразования детекторных измерительных преобразователей с полупроводниковыми диодами достаточно подробно описаны в литературе [1–4]. Амплитудная характеристика таких преобразователей имеет два участка — квадратичный (в области малых значений напряжений) и линейный с переходной областью между ними, реализующей плавный переход от квадратичной к линейной зависимости (рис. 2). Согласно [2]:

$$\begin{aligned} \text{при } U_{\text{э}} \rightarrow 0, f(U_{\text{э}}) &\rightarrow K_1\sqrt{U_{\text{э}}}, \text{ то есть } K_{\text{э}} \rightarrow \alpha x; \\ \text{при } U_{\text{э}} \rightarrow \infty, f(U_{\text{э}}) &= K_2U_{\text{э}}, \text{ то есть } K_{\text{э}} \rightarrow \beta x^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где K_1 и K_2 — коэффициенты пропорциональности, $x = \sqrt{U_{\text{э}}}$. Необходимо, чтобы функция преобразования аппроксимировала оба этих участка с требуемой точностью. Вид амплитудной характеристики, широкий амплитудный диапазон измерителя, а также неравномерность значений погрешности экспериментальных данных ограничивают выбор способа аппроксимации амплитудной характеристики. Например, применение простейших методов аппроксимации, таких как линейная или квадратичная, для всего диапазона экспериментальных значений характеризуется высокой погрешностью аппроксимации.

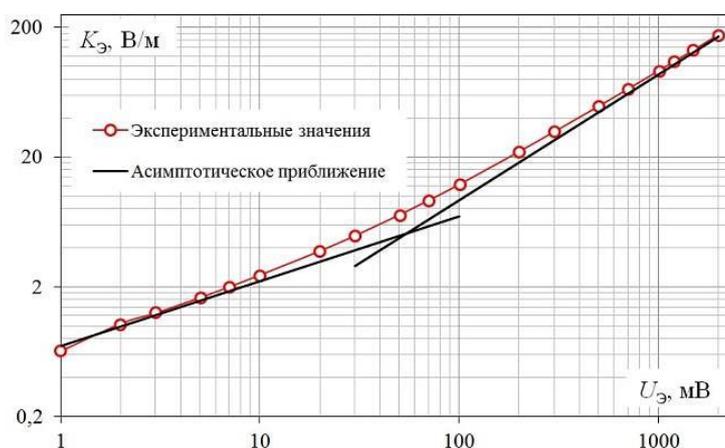


Рис. 2. Асимптотическое приближение амплитудной характеристики диодного преобразователя

Согласно ограничениям, приведённым выше, были предложены и опробованы различные способы аппроксимации амплитудной характеристики: использование методов интерполяции; введение логарифмического преобразования координат при интерполяции; построение аппроксимирующей функции на основе дробно-рациональных функций; введение функции поправки. Также были предложены способы обработки экспериментальных данных: применение весовой функции и сокращение амплитудной характеристики.

Применение интерполяционных методов является широко используемым подходом при построении ФП. Систему интерполяционных многочленов для N узлов интерполяции в общем виде можно представить следующим образом:

$$K_a = S(U_{\varepsilon 1}, \dots, U_{\varepsilon N}; K_{\varepsilon 1}, \dots, K_{\varepsilon N}; U_{\varepsilon}), \quad (2)$$

где K_a — аппроксимационные значения амплитудного коэффициента; $U_{\varepsilon 1}, \dots, U_{\varepsilon N}$ — амплитудные значения в узлах интерполяции; $K_{\varepsilon 1}, \dots, K_{\varepsilon N}$ — экспериментальные значения амплитудного коэффициента в узлах интерполяции; U_{ε} — амплитудный диапазон измерителя, $i = 1, \dots, N$ — число узлов интерполяции (также число коэффициентов для аппроксимирующей функции).

Однако широкий амплитудный диапазон приводит к тому, что погрешность интерполяции во много раз превышает случайную погрешность измерений. Улучшить данную ситуацию можно с помощью логарифмического преобразования координат и интерполяции в новой системе отсчёта:

$$\begin{aligned} K_{La} &= S_L(U_{L1}, \dots, U_{LN}; K_{L1}, \dots, K_{LN}; U_L); \\ K_a &= 10^{K_{La}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $U_{Li} = \log(U_{\varepsilon i})$, $K_{Li} = \log(K_{\varepsilon i})$ — преобразованные экспериментальные значения в узлах интерполяции, $U_L = \log(U_{\varepsilon})$.

Введение новой системы отсчёта в пространстве интерполяции позволяет искусственно уменьшить диапазон аппроксимации и приблизить максимальное значение погрешности аппроксимации к случайной погрешности измерений.

Подбор основной аппроксимирующей функции производился на основании следующих критериев: функция должна быть гладкой; в диапазоне малых значений принимать квадратичный вид; в диапазоне больших значений принимать линейный вид; обеспечивать гладкий переход от квадратичной к линейной части.

Одним из классов функций, широко использующихся в аппроксимации характеристик нелинейных элементов, являются дробно-рациональные функции [5, 6]. Использование функций такого типа для аппроксимации имеет ряд преимуществ: они обладают лучшей точностью приближения (по сравнению с аппроксимацией полиномом Тейлора [7]); хорошо подходят для аппроксимации функций с нерегулярным характером поведения (или с некоторыми особенностями); подходят для аппроксимации степенных рядов.

Рассмотрим частный случай построения функции аппроксимации с двумя параметрами на основе дробно-рациональной функции, представляющей собой отношение полиномов 2 степени:

$$K_a = \frac{m_0 + m_1 x + m_2 x^2}{n_0 + n_1 x + n_2 x^2}. \quad (4)$$

Объединив (1) и (4), представим коэффициенты α и β в виде:

$$\alpha = \frac{\frac{m_0}{x} + m_1 + m_2 x}{n_0 + n_1 x + n_2 x^2} = \text{const}; \quad \beta = \frac{\frac{m_1}{x} + m_2}{n_0 + n_1 x + n_2 x^2} = \text{const}.$$

При $x \rightarrow 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m_0}{x} \rightarrow \infty$, то есть $\alpha \rightarrow \infty$, поэтому $m_0 = 0$.

При $x \rightarrow \infty$ порядок числителя и знаменателя не совпадает, поэтому $\beta \rightarrow 0$ при любом значении n_1 и n_2 , кроме $n_1 = n_2 = 0$.

Таким образом, аппроксимирующая функция в первом приближении примет вид:

$$K_a = x^2 \cdot \frac{\frac{m_1}{x} + m_2}{n_0}.$$

Проведя стандартные преобразования и сделав замену $\frac{m_1}{n_0} = A_1$, $\frac{m_2}{n_0} = A_2$, получим функцию аппроксимации амплитудной характеристики с двумя параметрами:

$$K_a = A_1 \sqrt{U_{\text{э}}} (1 + A_2 \sqrt{U_{\text{э}}}). \quad (5)$$

Данные преобразования можно произвести над отношением полиномов любой степени и получить тем самым аппроксимирующие функции с разным числом коэффициентов (3, 4, 6 и т.п.).

В общем виде функцию аппроксимации амплитудной характеристики дробно-рациональной функцией можно записать как:

$$K_a = R(A_1, \dots, A_N; \sqrt{U_{\text{э}}}), \quad (6)$$

где A_1, \dots, A_N — коэффициенты аппроксимирующей функции.

Один из способов построения функции преобразования состоит в том, чтобы выделить главную часть функции преобразования, а оставшиеся небольшие отклонения уже компенсировать функцией поправки $P(U)$, близкой к единице. То есть искать ФП в виде:

$$K_a = \varphi(U) \cdot P(U).$$

Для начала осуществляется определение коэффициентов главной части функции $\varphi(U)$ с помощью метода минимизации, затем таким же образом осуществляется поиск коэффициентов функции поправки $P(U)$ — функции, аппроксимирующей отношение экспериментального значения амплитудного коэффициента к значению, рассчитанному с помощью главной части функции: $K_{\text{э}} \cdot (\varphi(U))^{-1}$.

Функция поправки, во-первых, не должна значительно усложнять функцию преобразования, а во-вторых, должна учитывать её особенности. В работе применялись полиномиальные функции до пятого порядка. В качестве главной части функции использовалась дробно-рациональная функция. Общий вид функции аппроксимации с учётом функции поправки:

$$K_a = R(A_1, \dots, A_N; \sqrt{U_{\text{э}}}) \cdot P(x_1, \dots, x_6; \log(U_{\text{э}})). \quad (7)$$

Параметры аппроксимирующих функций определялись с помощью метода минимизации. Построение минимизирующего многочлена осуществлялось по методу наименьших квадратов. При его построении предложено использовать весовую функцию. Она позволяет решить проблему неравномерности значений погрешности экспериментальных данных. В том случае, если погрешность измерения напряжения на выходе антенны близка к 0, то весовой коэффициент будет стремиться к 1. Во всех остальных случаях он будет лежать в пределах < 1 , что позволит пропорционально уменьшить вклад этих точек в общую сумму.

Построение весовой функции осуществлялось на основе погрешности определения экспериментальных значений амплитудного коэффициента Δk , зависящей от погрешности воспроизведения поля и погрешности измерения амплитудного коэффициента, обусловленной неточностью измерения напряжения U на выходе измерителя: $g = (\Delta k)^{-2}$.

Минимизирующий многочлен в общем виде выглядит следующим образом:

$$F = \sqrt{\sum_{j=1}^n g_i \left(\frac{K_{aj}(U_j) - K_{\text{э}j}}{K_{\text{э}j}} \right)^2} \rightarrow \min, \quad (8)$$

где $j = 1, \dots, n$ — число экспериментальных точек; $K_{aj}(U_j)$ — функция в зависимости от способа аппроксимации — (6) или (7).

Ниже приведены результаты аппроксимации данных, представленных на рис. 2. Критериями качества аппроксимации в работе являются СКО от экспериментальных данных и максимальное значение относительной погрешности аппроксимации. Последний критерий позволяет нам определить равномерность распределения значения относительной погрешности аппроксимации при одинаковых значениях СКО. Указанные критерии аппроксимации будем рассчитывать для диапазона малой случайной погрешности измерителя. При этом аппроксимация будет проводиться для всего диапазона значений амплитудной характеристики.

По итогам сравнительного анализа четырёх предложенных методов аппроксимации была составлена сводная таблица результатов (таблица 1).

Таблица 1

Сводная таблица результатов предложенных способов аппроксимации

Вариант аппроксимации		Количество параметров функции	СКО, %	Максимальное отклонение, %
Сплайн-интерполяция (кубический сплайн, $N = 5$)		10	9,08	-19,14
Сплайн-интерполяция с преобразованием координат		10	0,43	0,69
Рациональные функции		2	2,18	-5,37
		3	1,23	-1,76
		4	1,64	2,60
		6	0,91	-1,69
Рац. функция двух параметров + функция поправки в виде полинома	2 степени	4	1,24	-1,97
	3 степени	5	0,58	-1,40
	4 степени	6	0,43	-0,78
	5 степени	7	0,26	-0,51

Проанализировав полученные данные, можно сделать вывод о том, что наилучшим способом аппроксимации амплитудной характеристики является использование рациональных функций в совокупности с функцией поправки. Этот способ позволяет разбить сложную задачу аппроксимации на более простые и получить при этом меньшие значения СКО и максимального отклонения при одинаковом числе параметров, в сравнении с другими подходами (например, по сравнению с рациональной функцией четырёх переменных; по сравнению со сплайн-интерполяцией, где каждому участку интерполяции соответствует свой полином).

Если погрешность аппроксимации (Δ) существенно превышает погрешность определения экспериментальных данных (ϵ), то степень приближающего многочлена недостаточна для описания кривой. Если же погрешность аппроксимации существенно ниже погрешности определения экспериментальных данных, то старшие коэффициенты аппроксимации физически недостоверны. Хорошим результатом считается, когда значения ошибок практически равны. В этом случае степень приближающего многочлена оптимальна. В нашем случае исследование функций с большим числом параметров не имеет смысла, поскольку мы достигли точности случайной погрешности измерений (1 %).

Поскольку выбор узлов аппроксимации оказывает влияние на качество аппроксимации, была проведена оценка числа экспериментальных точек амплитудной характеристики, необходимого для достижения заданной погрешности. Для этого эмпирическим путём в диапазоне амплитудной характеристики измерителя были выбраны различные группы узлов аппроксимации. Результаты аппроксимации полученных значений дробно-рациональной функцией с 3 параметрами (без использования весовой функции) представлены в таблице 2.

Таблица 2

Результаты оценки числа экспериментальных точек, необходимого для достижения заданной погрешности

Число точек аппроксимации	СКО, %	Максимальное отклонение, %
19	1,45	-2,23
10	1,46	2,04
9	1,54	-2,65
5	1,27	-1,79
4	1,09	-1,93
3	1,32	-1,76

Сравнив полученные значения СКО и максимального отклонения с результатами аппроксимации полной амплитудной характеристики (строка 1 в таблице 2), можно сделать вывод, что при уменьшении числа экспериментальных точек значительного увеличения СКО и максимального отклонения не наблюдается. Таким образом, сокращение количества точек амплитудной характеристики не ухудшает качества аппроксимации.

В результате исследования была получена простая функция преобразования детекторного измерителя, которая содержит малое число параметров и использует минимальное число точек амплитудной характеристики, что обеспечивает лёгкость обработки и хранения данных. Полученная характеристика обеспечивает низкую погрешность аппроксимации. Введение функции поправки в виде полинома позволяет добиться улучшения качества аппроксимации. Использование весовой функции позволяет учесть неравномерность значений погрешности определения экспериментальных данных. Было показано, что при построении функции преобразования ИП достаточно снятия амплитудной характеристики в 3 точках, что существенно снижает трудозатраты при определении ФП для диодных преобразователей и ресурсы на вычисления.

Список литературы

1. Лукьянов В.И., Репко А.А. Транспортируемый эталон напряжённости электрического поля // Измерительная техника. — 2004. — № 3. — С. 34–37.
2. Лукьянов В.И., Токатлы В.И., Тищенко В.А. Исследование функции преобразования электрически малой дипольной антенны с полупроводниковым диодом // Измерительная техника. — 2000. — № 2. — С. 44–48.

3. Kanda M. Analytical and numerical techniques for analyzing an electrically short dipole with a nonlinear load // IEEE Trans. Antennas Prop. — 1980. — V. 28. — No. 1. — P. 71–78.
4. Канда М. и др. Эталоны для измерения электромагнитных полей // ТИИЭР. — 1986. — Т. 74. — № 1. — С. 135–144.
5. Супруненко С.Н. Среднеквадратичная аппроксимация чётными неотрицательными дробно-рациональными функциями // Учёные записки ЦАГИ. — 1990. — № 3. — С. 114–126.
6. Муссонов Г.П. Аппроксимация градуировочных характеристик измерительных преобразователей — М.: ЦНИИАтоминформ, 1987. — С. 5–15.
7. Cohn H. A Short Proof of the Simple Continued Fraction Expansion of e // The American Mathematical Monthly. — 2006. — V. 113. — No. 1. — P. 57–62.

Статья поступила в редакцию: 27.09.2021 г.

Статья прошла рецензирование: 29.09.2021 г.

Статья принята в работу: 30.09.2021 г.