

УДК 621.3.088

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПОВЫШЕНИЯ  
ИНФОРМАТИВНОСТИ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ  
В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОРБИТ  
НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВ**

**В.С. Крылов**

*Западно-Сибирский филиал ФГУП «ВНИИФТРИ», Новосибирск, Россия,  
krulov@sniim.ru*

*Аннотация. В связи с возросшими требованиями к точности и надёжности позиционирования навигационных спутников (НС) на орбитах становится важным повышение информативности траекторных измерений. В статье предлагается подход к такому повышению, который основан на формировании дополнительных уравнений с помощью инструментальных переменных.*

*Ключевые слова: орбитальные навигационные спутники, траекторные измерения, информативность, точность.*

**STUDY OF THE POSSIBILITIES OF INCREASING  
THE INFORMATION CAPACITY OF TRAJECTORY  
MEASUREMENTS IN THE PROBLEM OF RESTORING  
THE ORBITS OF NAVIGATION SATELLITES**

**V.S. Krylov**

*West Siberian branch of FSUE "VNIIFTRI", Novosibirsk, Russia,  
krulov@sniim.ru*

*Annotation. In connection with the increased requirements for the accuracy and reliability of positioning the navigation satellites (NS) in orbits, it is important to increase the information capacity of trajectory measurements. The article proposes an approach to such an increase, which is based on the formation of additional equations using instrumental variables.*

*Key words: orbital navigation satellites, trajectory measurements, information capacity, accuracy.*

Определение орбит космических объектов, движущихся в поле притяжения тел с большой массой, — классическая задача небесной механики [1].

С развитием спутниковых навигационных технологий существенно возросли требования к точности и надёжности позиционирования навигационных спутников (НС) на орбитах. При этом высокоточное определение параметров движения НС является ключевой задачей эфемеридно-баллистического обеспечения (ЭБО) спутниковых навигационных систем [2].

Движение орбитальной группировки НС в околоземном пространстве описывается в общем случае дифференциальным уравнением вида [2]

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), \mathbf{s}(t), \boldsymbol{\theta}_1), t \in [t_0, t_N], \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}(t) \in R^n$  — расширенный вектор состояния орбитальной группировки  $n$  НС, включающий в себя параметры движения каждого спутника  $\mathbf{u}_i^T(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t), V_{xi}(t), V_{yi}(t), V_{zi}(t)), i = 1, \dots, n$ ;  $\mathbf{s}(t)$  — вектор возмущений, влияющих на движение спутника, таких как гравитационное воздействие Луны и Солнца, несферичность гравитационного поля Земли, радиационное давление солнечного излучения и другие воздействия различной природы [2–4];  $\boldsymbol{\theta}_1$  — вектор параметров модели движения, включающий в себя вектор начальных условий  $\mathbf{u}_i^T(t_0) = (x_i(t_0), y_i(t_0), z_i(t_0), V_{xi}(t_0), V_{yi}(t_0), V_{zi}(t_0)), i = 1, \dots, n$ , вектор параметров моделей радиационного давления, параметров вращения Земли и другие параметры.  $\mathbf{F}(\bullet)$  — гладкая вектор-функция, допускающая дифференцирование по компонентам вектора состояния  $\mathbf{u}_i(t)$ , вектора возмущений  $\mathbf{s}_i(t)$  и вектора параметров  $\boldsymbol{\theta}_1$ .

Исходную информацию для вычисления оценок параметров движения НС  $\hat{\mathbf{u}}(t_k), t_k \in [t_0, t_N]$  получают из результатов траекторных измерений  $\mathbf{D}(t_k) \in R^m$ , выполняемых с сети беззапросных измерительных станций (БИС), в зонах радиовидимости которых находятся НС орбитальной группировки. В общем виде уравнение траекторных измерений имеет вид

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t), \boldsymbol{\theta}_2) + \mathbf{V}(t), t \in [t_0, t_N], \quad (2)$$

где  $\mathbf{D}(t)$  — вектор кодовых и фазовых псевдодальномерных измерений, выполняемых с сети  $m$  БИС;  $\mathbf{H}(\bullet) \in R^m$  — нелинейная  $m$ -мерная вектор-функция, допускающая дифференцирование по  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{w}(t)$  и  $\boldsymbol{\theta}_2$ ;  $\mathbf{w}(t)$  — вектор факторов, влияющих на точность псевдодальномерных измерений (уходы бортовых часов НС и часов БИС, задержки навигационного сигнала в ионосферном и тропосферном слоях, неоднозначности фазовых измерений, проявление многопутности распространения навигационного сигнала и другие факторы);  $\boldsymbol{\theta}_2$  — вектор неизвестных параметров математических моделей влияющих факторов (параметров нестабильности применяемых часов, параметры моделей тропосферной и ионосферной задержек и другие параметры);  $\mathbf{V}(t)$  —  $m$ -мерный вектор случайных погрешностей псевдодальномерных измерений.

Важной особенностью существующей конфигурации сети БИС, выполняющих измерения для целей ЭБО ГЛОНАСС, является недостаточное покрытие орбит НС ГЛОНАСС измерениями в Южном полушарии Земли. В этих условиях представляется актуальным поиск путей к повышению информативности траекторных измерений по НС ГЛОНАСС, выполняемых с сети БИС недостаточной плотности.

Предлагаемый подход к повышению информативности траекторных измерений основан на формировании дополнительных уравнений вида (2) с помощью «инструментальных переменных» [5]. Повышение информативности траекторных измерений в рамках предлагаемого подхода трактуется следующим образом.

В подавляющем большинстве случаев построение эффективных моделей движения НС включает в себя задачу оценивания расширенного вектора состояния динамической системы, описываемой уравнениями (1), (2), путём решения системы алгебраических уравнений вида

$$U(t) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Y}(t) + \boldsymbol{\delta}(t) \quad (3)$$

с неточно заданной правой частью  $\boldsymbol{\delta}(t)$  относительно расширенного вектора состояния системы  $\mathbf{x}$ . Здесь  $\mathbf{Y}(t)$  — вектор траекторных измерений по орбитальной группировке НС. При этом погрешность оценивания  $\mathbf{x}$  зависит в равной мере от величины модуля вектора  $\boldsymbol{\delta}(t)$  и от степени обусловленности матрицы  $U^T(t) \cdot U(t)$ .

Предлагаемый подход к повышению информативности траекторных измерений направлен на улучшение степени обусловленности матрицы  $U^T(t) \cdot U(t)$  путём формирования дополнительных уравнений вида (3) с помощью метода «инструментальных переменных» [5], что эквивалентно привлечению в качестве источника измерительной информации для оценивания  $\mathbf{x}$  некоторых дополнительных «виртуальных» БИС.

Далее для упрощения изложения, не изменяющего идейную сторону предлагаемого подхода к повышению информативности траекторных измерений, будем рассматривать линейаризованные уравнения псевдодальномерных измерений (2) для одного выбранного НС в зоне радиовидимости сети БИС в отсутствие факторов, влияющих на результаты измерений:

$$\rho_j(t) = \rho_{j0}(t) + \mathbf{h}_j^T(t) \cdot \mathbf{u}(t) + q_j(t), \quad j = 1, \dots, m, \quad (4)$$

где  $\mathbf{u}^T(t) = (x(t), y(t), z(t))$  — вектор текущих координат НС;  $\mathbf{h}_j^T(t) = \frac{\partial \rho_j(t)}{\partial \mathbf{u}^T(t)}$ ,  $j = 1, \dots, m$  — вектор направляющих косинусов на радиотрассе, идущих

от НС до БИС;  $q_j(t)$  — погрешности линейаризации геометрической дальности и случайные погрешности с ограниченной дисперсией;  $\rho_j(t)$  — измеренные значения псевдодальности;  $\rho_{j0}(t)$  — вычисленные дальности от БИС до опорной орбиты, заданной эфемеридами НС и подлежащей уточнению.

Рассматривая движение НС по касательной к орбите, вектор  $\mathbf{u}^T(t) = (x(t), y(t), z(t))$  может быть представлен равенством:

$$\mathbf{u}_j^T(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \mathbf{u}_j^T(t_0). \quad (5)$$

С помощью матрицы изохронных производных [6]

$$\Phi(t, t_0) = \frac{\partial(x(t), y(t), z(t))}{\partial(x(t_0), y(t_0), z(t_0))}.$$

Подстановка (5) в (4) приводит к системе  $m$  линейных алгебраических уравнений с неточно заданной правой частью вида (3).

Восстановление орбиты НС (согласно [6, 7] — дифференциальное исправление орбит) сводится к оцениванию вектора начальных условий уравнения движения НС  $\mathbf{u}^T(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$  по результатам траекторных измерений  $\rho_0(t), t \in [t_0, t_N]$  путём решения (4) с учётом (5) и последующему интегрированию уравнений движения НС (1) с полученными оценками вектора начальных условий  $\mathbf{u}(t_0)$ . Важным условием точного воспроизведения орбиты НС являются требования точности оценивания вектора  $\mathbf{u}^T(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ .

Трудности, возникающие на этом пути, связаны с плохой обусловленностью системы алгебраических уравнений (4) в силу зависимости векторов направляющих косинусов, близкой к линейной.

Преодолеть эти трудности удастся за счёт привлечения метода «инструментальных переменных» [5], позволяющего на базе уравнений измерений (4) формировать дополнительные уравнения, линейно не зависящие от (4).

Для реализации этого подхода левая и правая части уравнения измерений (4) почленно умножаются на выбранную определённым образом инструментальную переменную  $\gamma_l(t), l = 1, \dots, L$  и интегрируются на интервале наблюдений  $t \in [t_0, t_N]$ :

$$\int_{t_0}^{t_N} \gamma_l(t) (\rho_j(t) - \rho_{0j}(t)) dt = \int_{t_0}^{t_N} \gamma_l(t) \mathbf{h}_j^T(t) \Phi(t_0, t) dt \cdot \mathbf{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t_N} \gamma_l(t) q_j(t) dt, l = 1, \dots, L.$$

Эти уравнения становятся дополнительными в системе алгебраических уравнений (3).

Необходимо заметить, что для выбора инструментальных переменных  $\gamma_l(t), l = 1, \dots, L$ , в задаче доопределения уравнений траекторных измерений требуются дополнительные исследования характера изменения направляющих косинусов  $\mathbf{h}_j(t)$  для конкретной конфигурации сети БИС.

Для иллюстрации описанного подхода был выполнен модельный эксперимент. В качестве инструмента моделирования использовался программный имитатор измерительной информации, поступающей от орбитальных группировок НС ГЛОНАСС и GPS ModBIS24 [8]. Имитатор ModBIS24

обеспечивает задание сети БИС на поверхности Земли, расчёт движения орбитальной группировки НС, расчёт геометрических дальностей от всех НС до заданных БИС, имитацию факторов, влияющих на движение НС и влияющих на точность траекторных измерений.

Имитатор имеет удобный пользовательский интерфейс и возможность сохранять результаты моделирования в базе данных. Также обеспечивает вычисление матрицы изохронных производных  $\Phi(t, t_0)$  в виде конечных разностей [6].

В процессе экспериментов сравнивались три задачи:

1. НС наблюдался с двух БИС на интервале  $t \in [t_0, t_N]$ .
2. НС наблюдался с трёх БИС на интервале  $t \in [t_0, t_N]$ .
3. НС наблюдался с двух БИС, для которых уравнение измерений дополнялось уравнениями, полученными с помощью инструментальной переменной вида:  $y = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ .

Эффективность схем оценивания начальных условий  $\mathbf{u}(t_0)$  характеризовалась числом обусловленности матрицы  $U^T(t) \cdot U(t)$  для каждого эксперимента.

Результаты расчёта чисел обусловленности приведены в таблице.

Таблица

Эксперимент	Число обусловленности
1	6829,4
2	6454,6
3	474,3

Сравнение чисел обусловленности показало, что привлечение дополнительных станций БИС не приводит к кардинальному улучшению решения задачи определения параметров НС, а применение инструментальных переменных позволяет на порядок снизить чувствительность к изменениям в правой части уравнений, возникающих из-за погрешностей, что приводит к более устойчивому решению системы алгебраических уравнений вида (3).

#### Список литературы

1. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. — М.: Мир, 1964. — 513 с.
2. Справочное руководство по небесной механике / под ред. Г.Н. Дубошина. — М.: Наука, 1978. — 864 с.
3. Шебшаевич В.С. и др. Сетевые спутниковые радионавигационные системы. — М.: Радио и связь, 1993. — 408 с.
4. Харисов В.Н., Перов А.И., Болдин В.А. Глобальная спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС. — М.: ИПРЖР, 1998. — 400 с.

5. ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ. Редакция 5.1. — М.: РНИИКП, 2008.
6. Бартенев В.А., Гречкосеев А.К., Козорез Л.А., Красильщиков М.Н. и др. Современные и перспективные информационные ГНСС-технологии в задачах высокоточной навигации / под ред. В.А. Бартенева, М.Н. Красильщикова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 192 с.
7. NAPEOS. Mathematical Models and Algorithms. Springer. — European Space Operation Centre, 2009. — 150 p.
8. Толстиков А.С., Томилов А.С., Чубич В.М., Черникова О.С. Алгоритмические пути повышения точности координатно-временных определений // Метрология времени и пространства. Доклады IX Международного симпозиума. — Менделеево: ФГУП «ВНИИФТРИ», 2019. — С. 78–90.
9. Урмаев М.С. Орбитальные методы космической геодезии. — М.: Наука, 1981. — 256 с.
10. Антонович К.М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии: в 2 т. — М.: Картгеоцентр, 2006.
11. Grewal M.S., Andrews A.P. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB. — 2<sup>nd</sup> ed. — USA, New York: John Wiley & Sons, 2001.
12. Бартнев В.А., Гречкосеев А.К. Комбинированный алгоритм определения и прогнозирования параметров движения ИСЗ с использованием адаптации // Космические исследования. — 1986. — Вып. 4. — С. 564–574.
13. Владимиров В.М., Гречкосеев А.К., Толстиков А.С. Имитатор измерительной информации для отработки эфемеридно-временного обеспечения космической навигационной системы ГЛОНАСС // Измерительная техника. — 2004. — № 8. — С. 12–14.

*Статья поступила в редакцию: 01.09.2021 г.*

*Статья прошла рецензирование: 01.10.2021 г.*

*Статья принята в работу: 25.10.2021 г.*