УДК 621.317

КОНТРОЛЬ ПРАВДОПОДОБИЯ РЕЗУЛЬТАТА МЕТРОЛОГИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ЕДИНОЙ СЕРИИ

Э.Б. Искендерзаде[1], Г.С. Велиев[2]

[1]Национальное аэрокосмическое агентство, Баку, Азербайджанская Республика,
[2]Азербайджанский технический университет, Баку, Азербайджанская Республика,
iskenderzadeh@rambler.ru,
veliyev.n.g.@mail.ru

Аннотация. Предложен метод контроля результата метрологической оценки инструментальной погрешности измерителей единой серии по критерию максимального правдоподобия. Решена задача достижения максимального правдоподобия результата метрологической оценки инструментальной погрешности измерителей единой серии аттестуемых партиями, состоящих из одинакового числа приборов. Показано, что если в пределах каждой партии приборов инструментальная погрешность распределена по логнормальному закону, то при проведении аттестации серийно по партиям измерителей, существует определённое соотношение измеряемой величины, среднеквадратического отклонения (с.к.о.) и среднего значения, при выполнении которого результат аттестации по всей серии измерителей считается максимально правдоподобной.

Ключевые слова: погрешность, правдоподобие, плотность вероятности, оптимизация, измерения.

VERIFICATION OF THE LIKELIHOOD OF THE RESULT OF METROLOGICAL ASSESSMENT OF THE INSTRUMENTAL ERROR OF METERS OF A SINGLE SERIES

E.B. Iskenderzade, H.S. Veliev

National Aerospace Agency, Baku, Republic of Azerbaijan,
Azerbaijan Technical University, Baku, Republic of Azerbaijan,
iskenderzadeh@rambler.ru,
veliyev.n.g.@mail.ru

Abstract. A method for controlling the result of metrological evaluation of the instrumental error of meters of a single series according to the criterion of maximum likelihood is proposed. The problem of achieving the maximum likelihood of the result of metrological evaluation of the instrumental error of meters of a single series of certified batches consisting of the same number of devices is solved. It is shown that if, within each batch of instruments, the instrumental error is distributed according to the lognormal law, then when conducting certification serially for batches of meters, there is a certain ratio of the measured value, S.K.O. and the average value, when performing which the result of certification for the entire series of meters is considered the most plausible.

Keywords: error, likelihood, probability density, optimization, measurements.

Введение

Хорошо известно, что каждая техническая продукция, выпускаемая сериями, имеет специфический технологический разброс, что объясняется пространственно-временными изменениями воздействующих отрицательных факторов производств. Неучёт технологического разброса в обычных моделях существенно затрудняет оценку всего технологического процесса производства. Так, например, согласно [1], неучёт технологического разброса параметров компонентов монолитных интегральных схем в моделях не позволяет предсказывать величину такого разброса при серийном выпуске, определять выход годных изделий. Как отмечается в работе [2], обычно уровень помех и разброс параметров транзисторов оценивают раздельно. При этом следует учесть, что уменьшение размеров транзисторов привело к увеличению степени разброса их параметров на кристалле. Согласно [2], разброс параметров в электронных узлах является определяющим фактором соотношения «точность — быстродействие — потребляемая мощность». Учёт статистических показателей разброса позволяет уменьшить чувствительность углов к разбросу параметров транзисторов и тем самым увеличить параметрическую надёжность изготавливаемых блоков. Согласно [3], технологический разброс транзисторов комплиментарной структуры метал-окись-полупроводник (КМОП) транзисторов не позволяет существенно уменьшить питающее напряжение блоков, что обычно считается одним из эффективных путей снижения энергопотребления электронных узлов. Вместе с тем вышеотмеченные электронные узлы и блоки, использованные в электронных измерительных устройствах, приводят к появлению характерных шумов, что в конечном счёте заканчивается снижением чувствительности измерителя, снижением отношения «сигнал / шум» на выходе.

Согласно классической теории измерений, погрешности независимо от источника их возникновения классифицируются двояко:

1) по причинно-следственному критерию: инструментальные и методические (модельные) погрешности;
2) по статистическому критерию: систематические и случайные погрешности [4].

При метрологической аттестации партии измерительных приборов по инструментальной погрешности результаты измерений x_0 представляются в виде инструментальной погрешность как сумма двух составляющих:

$$x_0 = m(x_0) \pm \sigma_{x_0}, \qquad (1)$$

где $m(x_0)$ — математическое ожидание; σ_{x_0} — с.к.о. результатов измерений.

Плотность распределения вероятности результатов измерений обычно подчиняется нормальному или логнормальному законам. Как отмечается в работе [5], логнормальный закон распределения обычно применяется, когда допуски к допустимой погрешности установлены асимметрично.

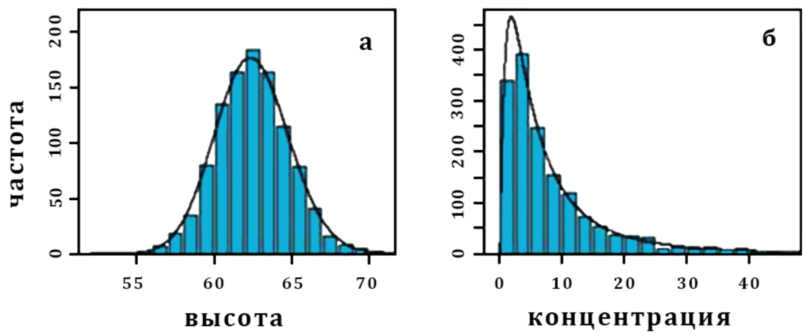

Рис. 1. Характерные кривые распределения вероятностей:
а — нормальное распределение; б — логнормальное распределение

Характерные кривые распределения вероятностей приведены на рис. 1. Согласно [6], логнормальные распределения часто встречаются в таких областях науки, как геология, бурение, медицина, окружающая среда, атмосфера, аэробиология и др. Как отмечается в [7], логнормальное распределение имеет место в следующих случаях:

– когда сигнал пропорционален логарифму концентрации вещества;
– при определении аналитов с очень низкой концентрацией;
– при очень большом разбросе результатов;
– при измерении времени и др.

Согласно [8], логнормальное распределение вероятностей целесообразно применять при статистической обработке результатов экспериментальных измерений, характеризующихся большой дисперсией, например, при анализе данных приёмника, когда между передатчиком и приёмником имеются многочисленные отражатели, или при нахождении в экранированной комнате. В работе [8] отмечено, что, по сути, логнормальное распределение — это тот случай, когда нормально распределён не сам измеряемый параметр, а его логарифм. Логнормальный закон распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}}\exp\left[-\frac{[\ln x-\mu]^2}{2\sigma^2}\right], \tag{2}$$

где

$$\mu=\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\ln x_i, \tag{3}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\left[\ln(x_i)-\mu\right]^2}, \tag{4}$$

где n — количество измерителей в партии.

Согласно [9], логнормальное распределение широко используется в метрологии механических узлов.

Предлагаемый метод

Предлагается метод метрологической аттестации партий измерительных приборов единой серии по инструментальной погрешности. Аттестация проводится по критерию достижения максимального правдоподобия результатов измерения инструментальной погрешности. Результаты измерений по каждой партии измерительных приборов характеризуются логнормально распределённой генеральной совокупностью, характеризующейся парой показателей (σ и μ), где σ — с.к.о.; μ — среднее значение $\ln x$.

В этом смысле допускаем, что множество аттестуемых партий измерительных приборов является гетерогенным, однако характеризуется некоторой упорядоченностью, заключающейся в следующем:

1. Существует множество $M = \{\mu_j\}$, где элементы этого множества определяются как:

$$\mu_j = \mu_{j-1} + \Delta\mu; \qquad \Delta\mu = \text{const}. \tag{5}$$

2. Существуют множества $S = \{\sigma_j\}; j = (\overline{1, m})$:

$$\sigma_j = \sigma_{j-1} + \Delta\sigma; \qquad \Delta\sigma = \text{const}. \tag{6}$$

3. Между σ_j и μ_j существует однозначная зависимость:

$$\sigma_j = f(\mu_j). \tag{7}$$

Известно, что для нормально распределённой генеральной совокупности выборочное среднее не зависит от выборочного стандартного отклонения. Однако в настоящей статье рассматривается случай, когда для любой партии измерительных приборов в исследуемой серии приборов имеется своя специфическая логнормально распределённая совокупность измеренных данных инструментальной погрешности.

Общий вид логнормально распределённых x, в которых существует зависимость типа (7), показан на рис. 2.

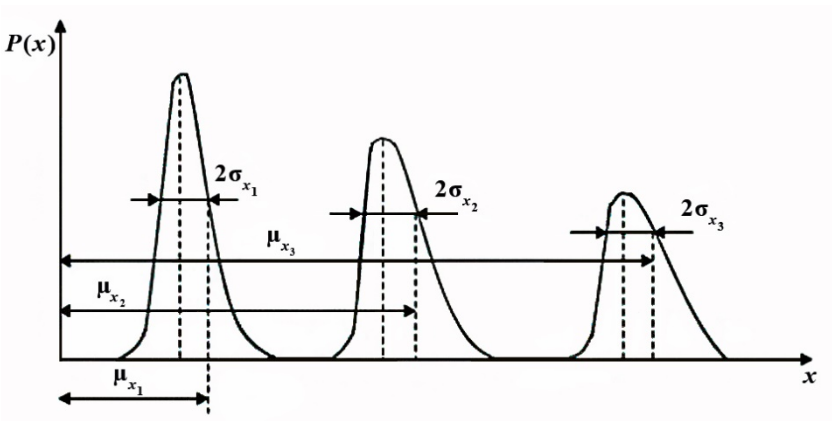

Рис. 2. Общий вид логнормально распределённых x, в которых существует зависимость типа (7)

С учётом (2), считая плотности распределения по партиям приборов независимыми, общую плотность распределения определим как:

$$W(\mu)=\prod_{j=1}^{m}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j}\,x}\exp\left[-\frac{\left[\ln x-\mu_j\right]^2}{2\sigma^2}\right]\right]. \tag{9}$$

Если (9) записать в условно-непрерывной форме и учесть функциональную зависимость (7), то функцию правдоподобия вычислим как:

$$\ln W(\mu)=\int_0^{\mu_{\max}}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi f(\mu)}x}\exp\left[-\frac{(In\ x-\mu_j)^2}{2f(\mu)^2}\right]\right]d\mu. \tag{10}$$

Таким образом In $W(\mu)$ оказывается функционалом, зависящим от $f(\mu)$. Для проведения метрологической аттестации с максимальным правдоподобием следует определить оптимальный вид функции $f(\mu)$. Для нахождения оптимальной функции $f(\mu)_{opt}$ вычислим производную выражение под логарифмом в (10). Имеем:

$$-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}x^2\sqrt{f(\mu)^3}}\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)}{2f(\mu)^2}\right]+\frac{2}{\sqrt{2\pi f(\mu)}}\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)}{2f(\mu)^2}\right]\cdot\frac{(\ln x-\mu)}{2f(\mu)^3}=0. \tag{11}$$

Из (11) находим:

$$f(\mu)=(\ln x-\mu)\cdot\sqrt{2}. \tag{12}$$

Чтобы определить тип экстремума (10) при решении (12), следует вычислить производную (11) по $f(\mu)$. Проверка показала, что при решении (12) функционал (10) достигает максимума при соблюдении условия (13):

$$f(\mu)<\frac{3}{\sqrt{1,5}}(\ln x-\mu). \tag{13}$$

Так как условие (13) не противоречит решению (12), то последнее можно считать правильным. Условие (12) перепишем как:

$$\ln x=\frac{f(\mu)}{\sqrt{2}}+\mu. \tag{14}$$

С учётом (3), (4) и (14) получим:

$$\ln x=\sqrt{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(x_i)-\mu\right]^2}{2}}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i. \tag{15}$$

Таким образом, при значении x, определяемом выражением (15), правдоподобие результата проводимой аттестации можно считать максимальным.

Заключение

Сформулирована и решена задача исследования правдоподобия результата метрологической оценки инструментальной погрешности измерителей единой серии, аттестуемых партиями, состоящих из одинакового числа приборов. Показано, что если в пределах каждой партии приборов инструментальная погрешность распределена по логнормальному закону, то при проведении аттестации серийно по партиям измерителей существует определённое соотношение измеряемой величины, с.к.о. и среднего значения, при выполнении которого результат аттестации во всей серии измерителей считается максимально правдоподобным.

Список литературы

1. Сальников А.С., Добуш И.М., Бабак Л.И., Торхов Н.А. Экспериментальное исследование и построение моделей пассивных компонентов СВЧ монолитных интегральных схем с учетом технологического разброса параметров // Доклады ТУСУРа. — № 2. — С. 113–117.
2. Адамов Ю., Губин Я., Сибагатуллин А., Сомов О. Аналоговые блоки в системах на кристалле // Электроника: наука. технология. — 2004. — 8.
3. Кремлев В.Я. Энергопотребление КМОП СБИС: пути решения проблемы // Зарубежная радиоэлектроника. — 1996. — № 2. — С. 87–90
4. Ososkov G.A., Kosarev E.L. Limits and accuracy in measurements // Physical methods, instruments and measurements. — V. 1. — URL: https://www.eolss.net/sample-chapters/c05/E6-08-01-01.pdf.
5. Castrup H. Selecting and applying error distributions in uncertainty analysis // Presented at the Measurement Science Conference, Anaheim, 2004. — URL: http://www.isgmax.com/Articles_Papers/Selecting%20and%20Applying%20Error%20Distributions.pdf.
6. Limpert E., Stahel W.A., Abbt M. Log-normal distributions across the sciences: keys and clues // BioScience. — V. 51. — № 5. — P. 341–349.
7. Родинков О.В., Бокач Н.А., Булатов А.В. Основы метрологии физико-химических измерений и химического анализа: учеб.-метод. пособие. — СПб.: ВВМ, 2010. — 136 с.
8. Carobbi C.F.M., Cati M., Millanta L.M. Using the log-normal distribution in the statistical treatment of experimental data affected by large dispersion. — URL: https://www.academia.edu/7222385/Using_the_log-normal_distribution_in_the_statistical_treatment_of_experimental_data_affected_by_large_dispersion.
9. Coskun A., Oosterhuis W.P. Statistical distributions commonly used in measuremen uncertainty in laboratory medicine // Biochem Med. — 2020. — 30 (1).

Статья поступила в редакцию: 26.10.2022 г.
Статья прошла рецензирование: 23.09.2022 г.
Статья принята в работу: 27.10.2022 г.